

Robotique et automatisation

Analyse des systèmes échantillonnés

1 – Analyse en boucle ouverte des systèmes échantillonnés	28
2 – Stabilité des systèmes échantillonnés	35
3 – Analyse en boucle fermée des systèmes échantillonnés	43
4 – Résumée	62

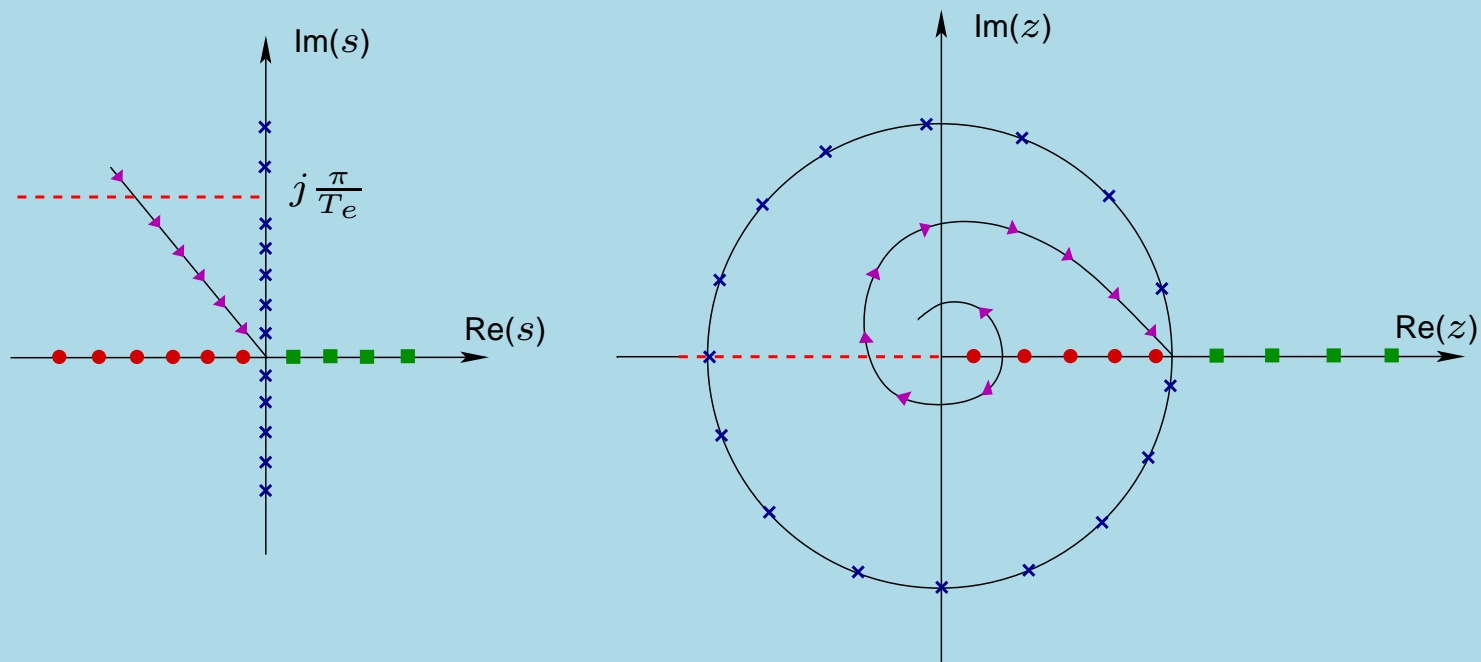
1 – Analyse en boucle ouverte des systèmes échantillonnés

👉 Pôles des systèmes échantillonnés :

➡ Pôles en s du système = pôles de la fonction de transfert $G(s)$

➡ Pôles en $z = e^{p_i T_e}$ = pôles de la transmittance échantillonnée $G(z)$

Correspondance entre les deux plans : pôle en $s = p_i \longrightarrow$ pôle en $z = e^{p_i T_e}$



Exemple :

⇒ Système d'ordre 1 :

$$\text{Soit } G(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \text{ alors}$$

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = \frac{K}{\tau} \frac{z}{z - c} \quad \text{avec } c = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

⇒ Système d'ordre 1 précédé par un BOZ :

$$\text{Soit } G(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \text{ précédé par un BOZ alors}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{K(1 - c)}{z - c} \quad \text{avec } c = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

👉 Zéros des systèmes échantillonnés :

pas de relation simple entre les zéros de $G(s)$ et ceux de $G(z)$

▣▣▣▣ $G(s)$ est à déphasage non minimal \nRightarrow $G(z)$ est à déphasage non minimal

▣▣▣▣ Un système continu sans zéros dans le demi-plan de droite peut donner un système échantillonné avec des zéros en dehors du cercle unité

➡ Réponse fréquentielle des systèmes échantillonnés :

Soit le système échantillonné $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$

$$\text{si } u(kT_e) = U_0 \sin(\omega T_e k) \mathbb{U}(k) \longrightarrow \begin{cases} \text{en régime stationnaire} \\ y(k) = U_0 G(\omega) \sin(\omega T_e k + \phi(\omega)) \end{cases}$$

Réponse fréquentielle en module et en phase (*diagramme de Bode*) :

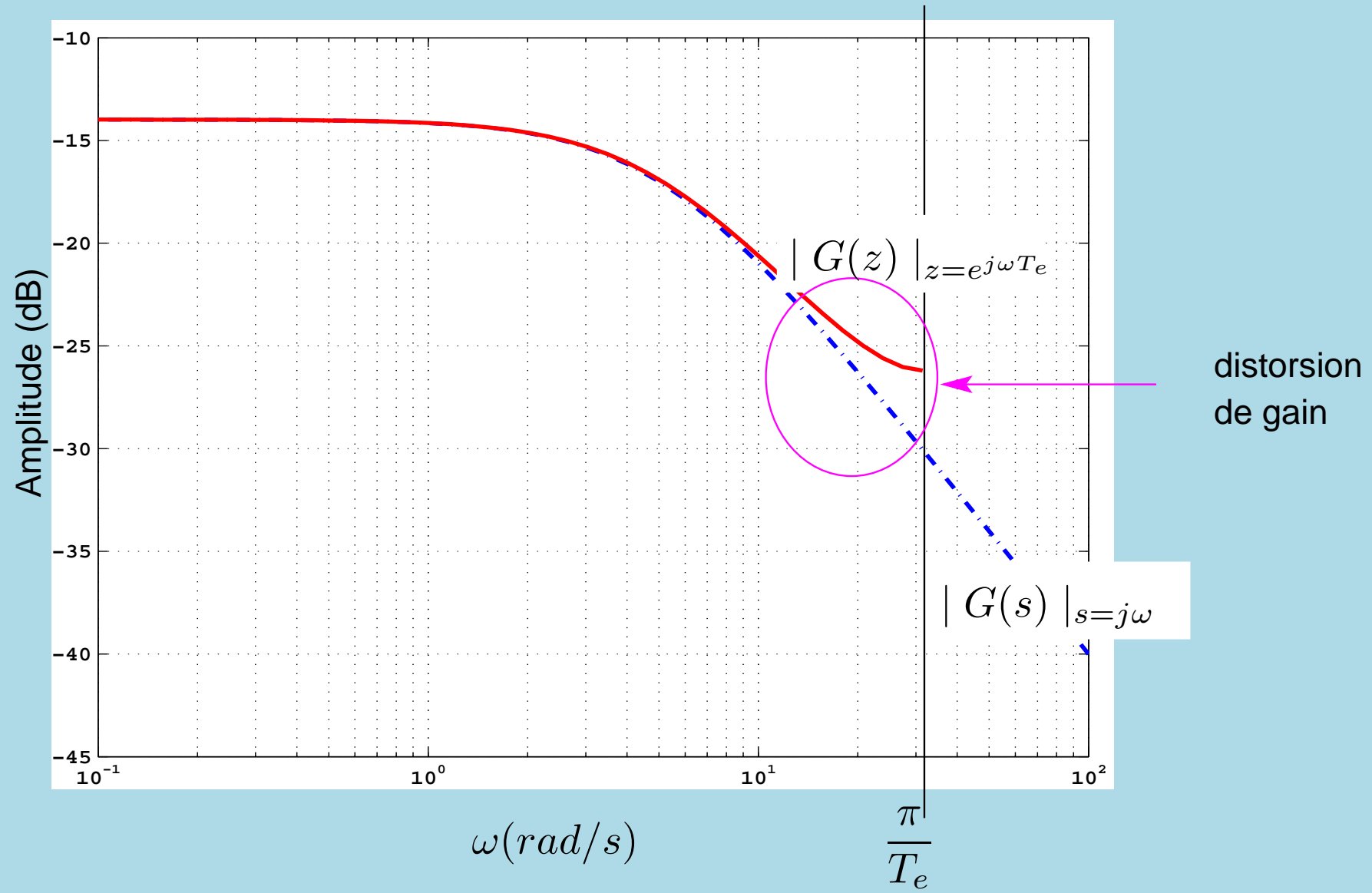
$$\begin{cases} |G(z)|_{z=e^{j\omega T_e}} & \text{en faisant } z \text{ parcourir le cercle unité} \\ \arg(G(z))_{z=e^{j\omega T_e}} & \text{c'est à dire pour } \omega \in \left[-\frac{\pi}{T_e}; \frac{\pi}{T_e}\right] \end{cases}$$

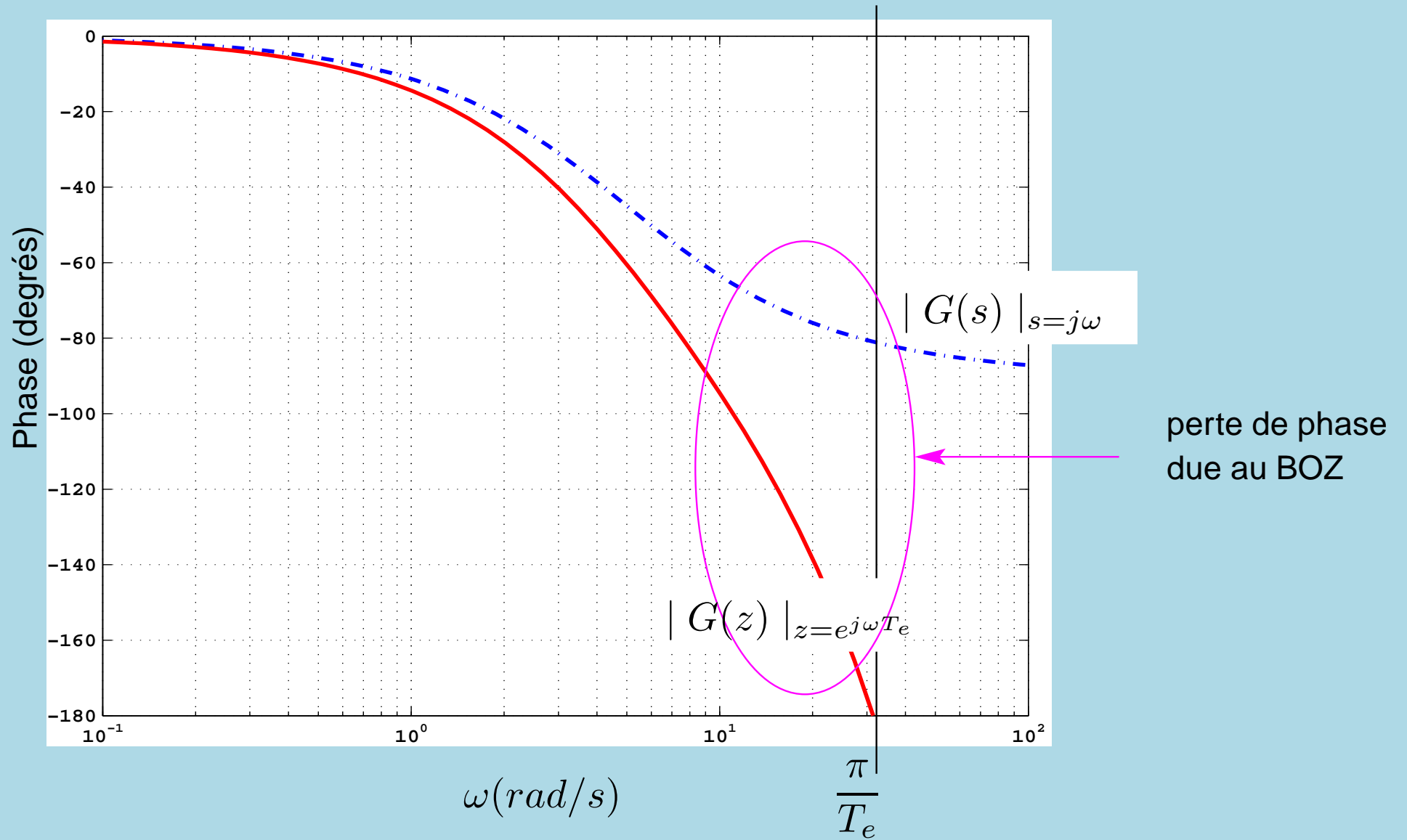
Exemple :

Soit $G(s) = \frac{1}{s + 5}$ précédé par un BOZ alors

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{1 - c}{5(z - c)} = \frac{0,07869}{z - 0,6065}$$

avec $c = e^{-5T_e}$ et la période d'échantillonnage $T_e = 0,1$





2 – Stabilité des systèmes échantillonnés

➡ Définition de la stabilité BIBO :

Un système défini par ses entrées-sorties est *BIBO stable* si pour toute entrée bornée

$$\| u(k) \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} | u(k) | < \infty$$

la sortie est bornée

$$\| y(k) \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} | y(k) | < \infty$$

➡ Théorème sur la stabilité :

Un système linéaire invariant à temps discret/échantillonné est *stable* si et seulement si tous ses pôles sont de module strictement inférieur à un.

☞ Critère de Jury :

Soit le système à temps discret de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{avec} \quad D(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \quad \text{et} \quad a_n > 0$$

Notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{0,i} = a_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \\ a_{j+1,i} = \begin{vmatrix} a_{j,0} & a_{j,n-j-i} \\ a_{j,n-j} & a_{j,i} \end{vmatrix} \\ \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{et} \quad 0 \leq i \leq n-j-1 \end{array} \right.$$

Le polynome $D(z)$, à coefficients réels, a ses racines de module inférieur à l'unité si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

1. $|a_0| - a_n < 0$
2. $D(1) > 0$
3. $(-1)^n D(-1) > 0$
4. $|a_{j,0}| - |a_{j,n-j}| > 0, \forall j = 1, 2, \dots, n - 2$

▣▣▣▣ Système d'ordre 1 :

$D(z) = a_0 + a_1z$ et les conditions du critère sont

1. $|a_0| < a_1$
2. $a_0 + a_1 > 0$
3. $-a_0 + a_1 > 0$

▣▣▣▣ Système d'ordre 2 :

$D(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ et les conditions du critère s'écrivent

1. $|a_0| < a_2$
2. $a_0 + a_1 + a_2 > 0$
3. $a_0 - a_1 + a_2 > 0$

Systeme d'ordre 3 :

$$D(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 \text{ et les conditions du critère devient}$$

1. $|a_0| < a_3$
2. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$
3. $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0$
4. $|a_0^2 - a_3^2| > |a_0a_2 - a_3a_1| \iff a_3^2 - a_0^2 > |a_0a_2 - a_3a_1|$

a_0		a_1		a_2		a_3	
a_3		a_2		a_1		a_0	
$a_{1,0} =$	a_0	a_3		$a_{1,1} =$	a_0	a_2	
	a_3	a_0			a_3	a_1	
					$a_{1,2} =$	a_0	a_1
						a_3	a_2

☞ Transformée en w et critère de Routh :

▣ Transformée en w :

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \iff z = \frac{1 + w}{1 - w}$$

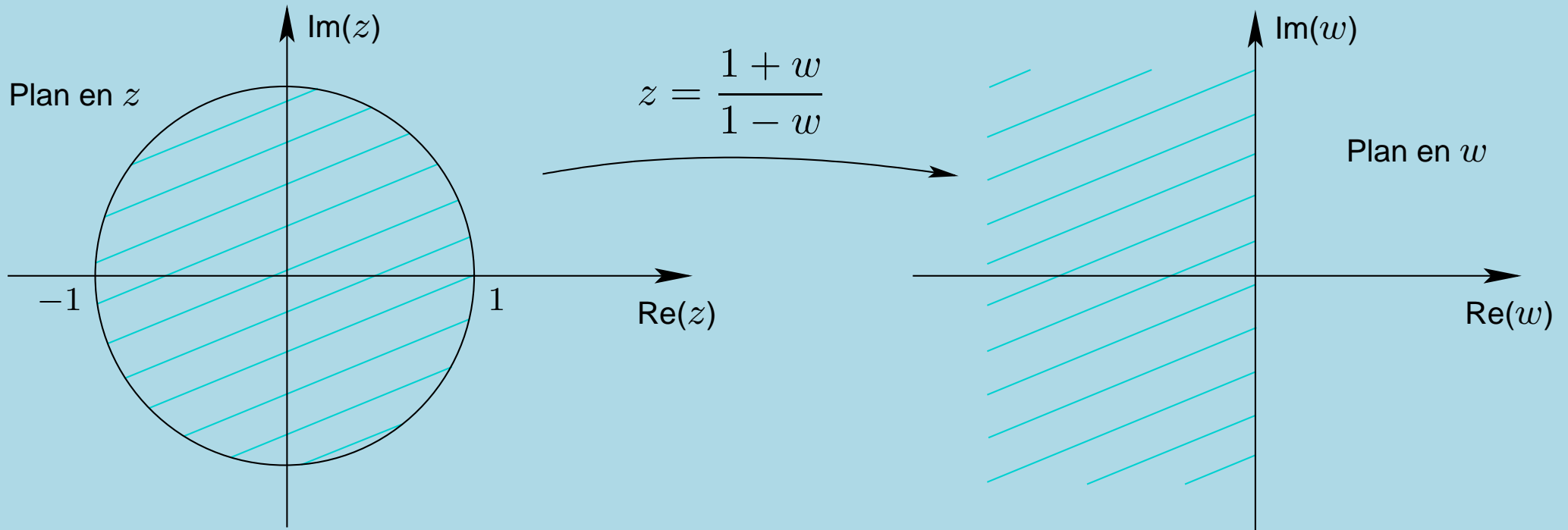
Si $z = e^{j\omega T_e}$ alors :

$$w = \frac{e^{j\omega T_e} - 1}{e^{j\omega T_e} + 1} = j \tan\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)$$

donc, pour $\omega T_e \in [-\pi, \pi]$ on obtient $w \in j[-\infty, \infty]$

De plus,

$$|z| = \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{Re}(w))^2 + \operatorname{Im}(w)^2}}{\sqrt{(1 - \operatorname{Re}(w))^2 + \operatorname{Im}(w)^2}} \implies |z| < 1 \iff \operatorname{Re}(w) < 0$$



▣ Transformée en w et critère de Routh :

Le polynôme dénominateur $D(z)$ de la fonction de transfert est stable si le polynôme en w :

$$D(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \text{ a des racines à partie réelle négative}$$

càd si $D'(w) = (1-w)^n D\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ vérifie le critère de Routh

(n = degré du polynôme dénominateur $D(z)$)

3 – Analyse en boucle fermée des systèmes échantillonnés

👉 Etude de la stabilité du système asservi :

$$F_{BF}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)} = \frac{N_{BF}(z)}{D_{BF}(z)}$$

⇒ étudier les racines du polynôme caractéristique $D_{BF}(z) = 0$ ou de l'équation caractéristique

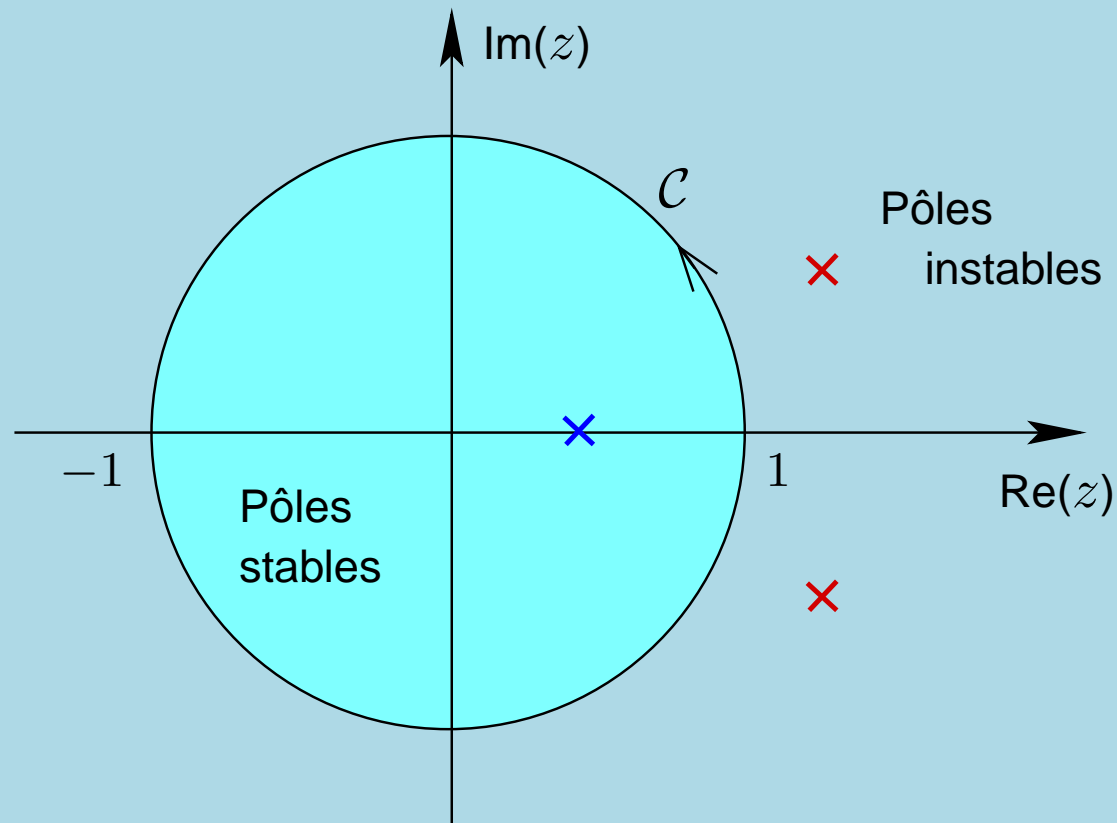
$$1 + F_{BO}(z) = 0 \quad \text{où} \quad F_{BO}(z) = C(z)G(z)H(z)$$

- ➡ méthodes algébriques : critère de Jury, transformée en w et critère de Routh
- ➡ *méthodes géométriques* (ou harmoniques) : critère de Nyquist, lieu d'Evans

☞ Critère de Nyquist :

▣ Contour de Nyquist = le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique :

$$\mathcal{C} = \{z \mid z = e^{j\Omega}, \Omega \in [-\pi, \pi], \Omega = \omega T_e\}$$



- *Lieu de Nyquist* de $F_{BO}(z)$ est défini comme la courbe décrite par l'ensemble de points :

$$\left\{ (\operatorname{Re}(F_{BO}(z)), \operatorname{Im}(F_{BO}(z))) \mid z = e^{j\Omega}, \Omega = \omega T_e \in [-\pi; \pi] \right\}$$

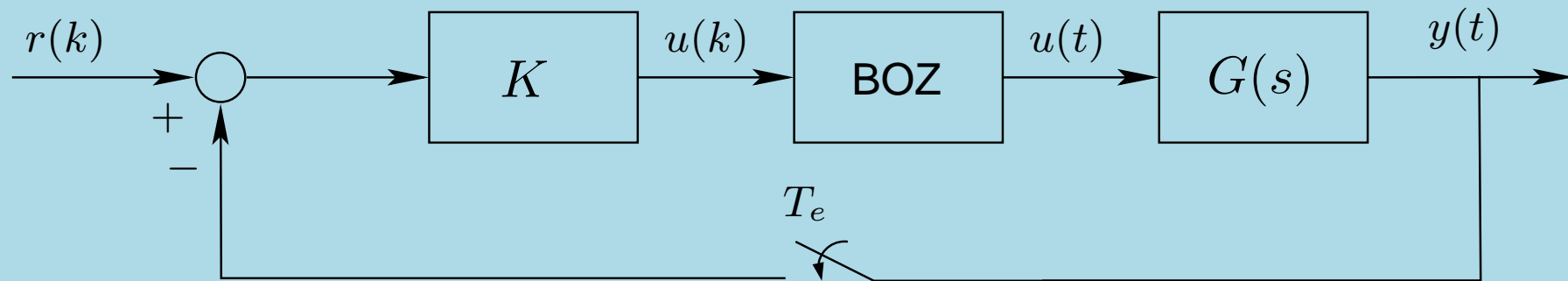
- *Critère de Nyquist*

Le système échantillonné en boucle fermée, d'équation caractéristique

$1 + F_{BO}(z) = 0$, est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de $F_{BO}(z)$ parcouru de $\omega = -\frac{\pi}{T_e}$ à $\omega = \frac{\pi}{T_e}$ avec $z = e^{j\omega T_e}$, entoure le point -1 dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $F_{BO}(z)$

Exemple :

Soit le système en BF avec $G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$. Etudier la stabilité du système en BF.



$$G(z) = \frac{1 - c}{z - c} \text{ avec } c = e^{-\frac{T_e}{\tau}} \implies F_{BO}(z) = \frac{K(1 - c)}{z - c}$$

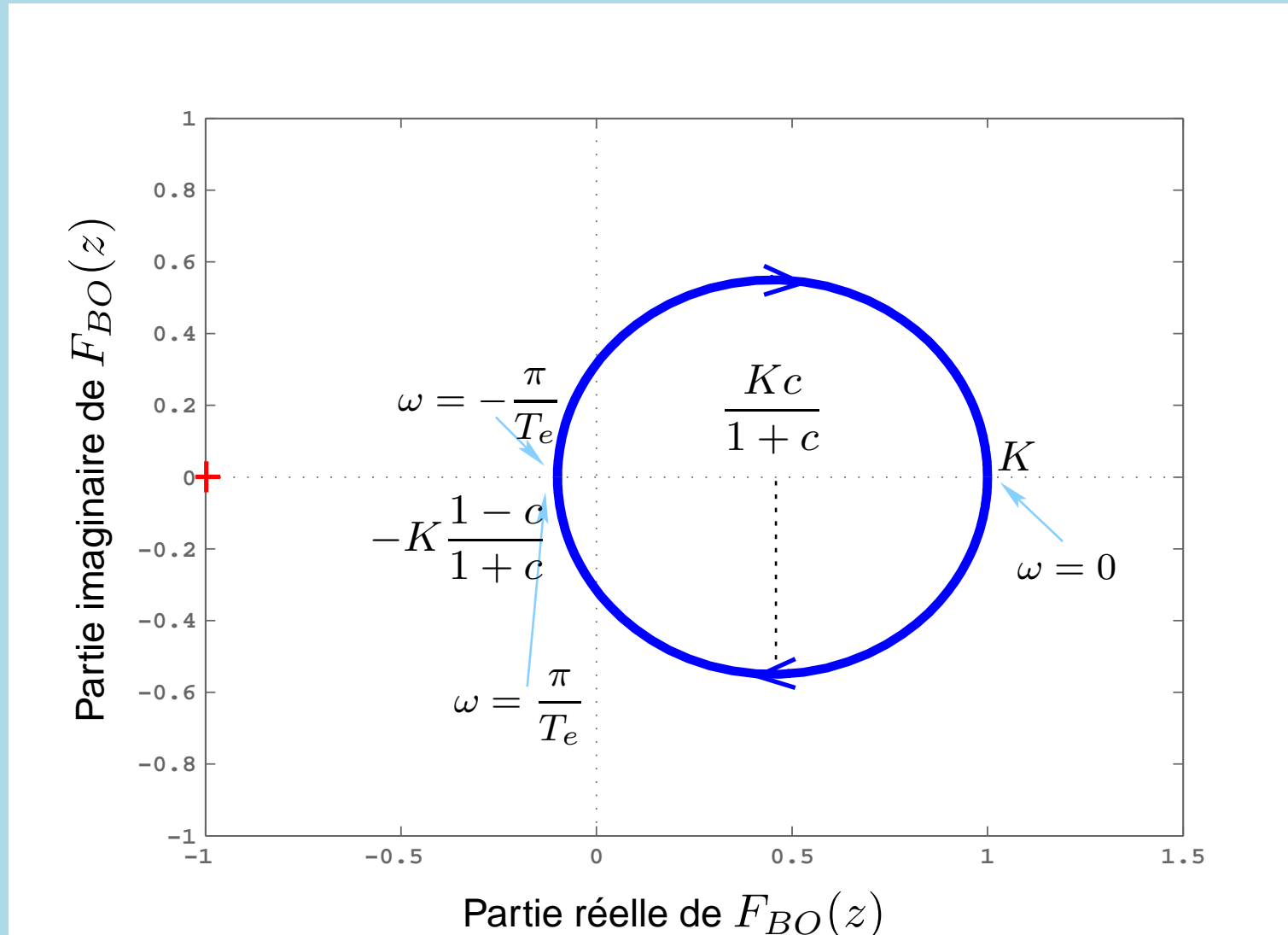
$$z = e^{j\omega T_e} \implies F_{BO}(e^{j\omega T_e}) = \underbrace{\frac{K(1-c)(\cos \omega T_e - c)}{1 - 2c \cos \omega T_e + c^2}}_{\text{partie réelle}} - j \underbrace{\frac{K(1-c) \sin \omega T_e}{1 - 2c \cos \omega T_e + c^2}}_{\text{partie imaginaire}}$$

Alors

ω	$F_{BO}(e^{j\omega T_e})$
0	K
$\frac{\pi}{T_e}$	$-K \frac{1-c}{1+c}$
$-\frac{\pi}{T_e}$	$-K \frac{1-c}{1+c}$

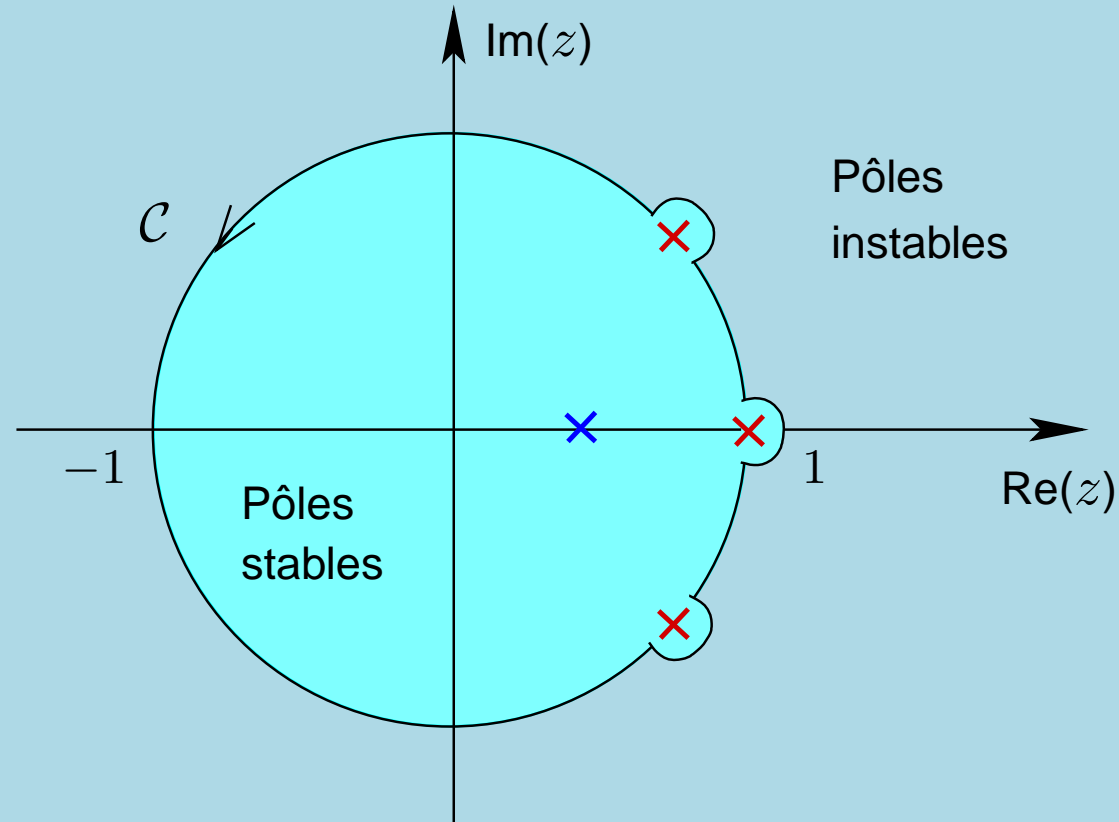
De plus,

$$\left(\Re(F_{BO}(e^{j\omega T_e})) - \frac{Kc}{1+c} \right)^2 + \left(\Im(F_{BO}(e^{j\omega T_e})) \right)^2 = \left(\frac{K}{1+c} \right)^2$$



Condition de stabilité en BF : $-1 < -K \frac{1-c}{1+c} \implies K < \frac{1+c}{1-c}$

☞ Contour de Nyquist lorsque $F_{BO}(z)$ a des pôles sur le cercle unité :

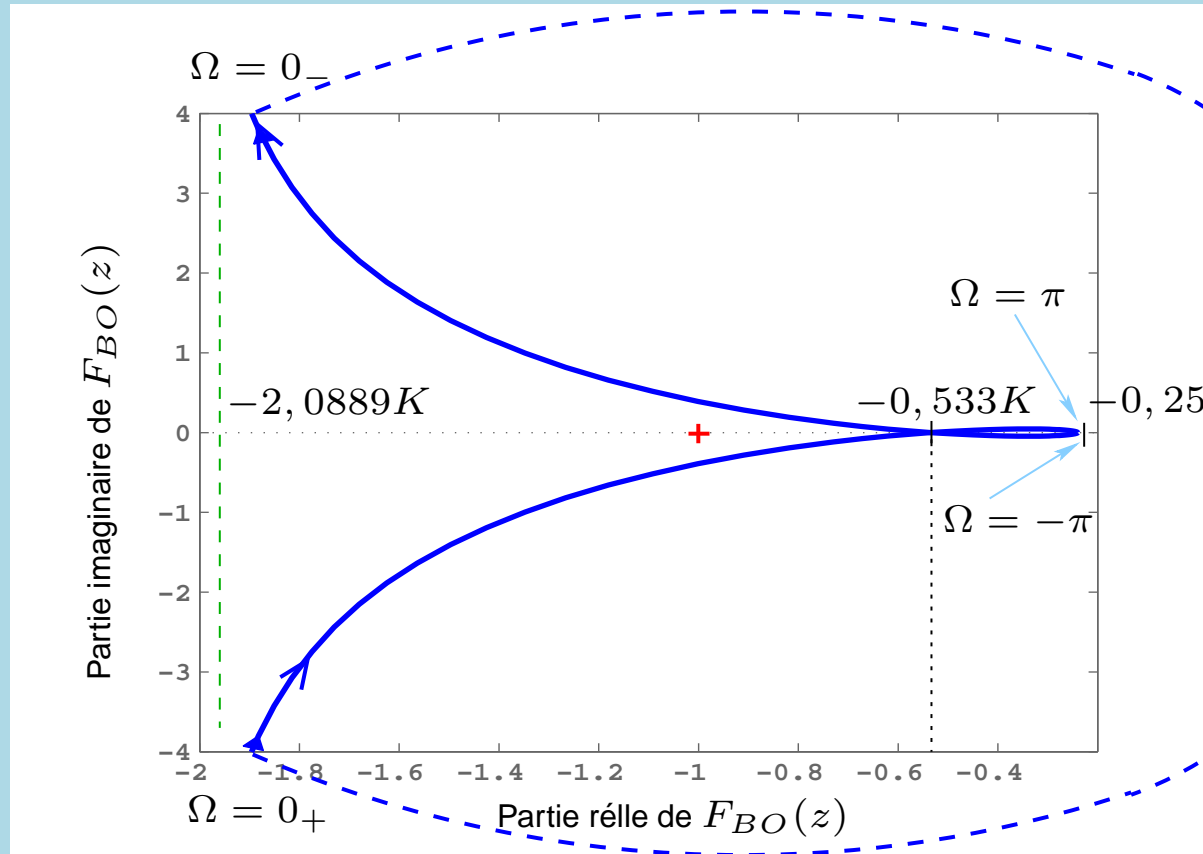


⇒ le lieu de Nyquist présente des branches à l'infini qui se referment par des demi-cercles de rayon infini

⇒ P comptabilise uniquement les pôles stables du système en boucle ouverte

Exemple :

Soit $F_{BO}(z) = \frac{K(z + 0,4)}{(z - 1)(z - 0,25)}$. Etudier la stabilité du système en BF.



Condition de stabilité en BF : $-1 < -0,533K \implies K < 1,8762$

☞ Lieu d'Evans :

Les courbes décrites par les pôles du système asservi lorsque $C(z) = K_c$ varie qui correspondent aux courbes décrites par les racines de l'équation caractéristique (de l'asservissement) lorsque K_c varie

⇒ étudier les racines du polynôme caractéristique $D_{BF}(z) = 0$ ou de l'équation caractéristique

$$1 + F_{BO}(z) = 0 \quad \text{où} \quad F_{BO}(z) = C(z)G(z)H(z) \quad \text{avec} \quad C(z) = K_c$$

▣ Règles de construction du lieu d'Evans :

⇒ construction basée uniquement sur la fonction de transfert $F_{BO}(z)$

$$F_{BO}(z) = K_c G(z) H(z) = \underbrace{K_c K_g}_K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)}$$

⇒ équation caractéristique du lieu d'Evans

$$\frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} = -\frac{1}{K} \quad \text{lorsque } K \text{ varie de } 0 \text{ à } \infty$$

►►► Un point M d'affixe z_M appartient au lieu des racines ssi :

1. *condition du module*

$$\frac{\prod_{i=1}^m |z_M - z_i|}{\prod_{j=1}^n |z_M - p_j|} = \frac{1}{K}$$

2. *condition de l'angle*

$$\sum_{i=1}^m \arg(z_M - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(z_M - p_j) = \pi(1 + 2\lambda) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{N} \text{ quelconque}$$

▣ Règle 1 :

→ *Nombre de branches du lieu* : n branches ; Le nombre de branches est identique au nombre de pôles de la boucle ouverte

→ *Points de départ* : les n branches partent, pour $K = 0$, des n pôles $\{p_j\}$ de $F_{BO}(z)$

→ *Points d'arrivée* : les n branches aboutissent, pour $K \rightarrow \infty$, aux m zéros $\{z_i\}$ et aux $n - m$ zéros à l'infini de $F_{BO}(z)$.

Donc, le lieu comporte $n - m$ branches qui vont à l'infini

➡ Règle 2 : Le lieux des racines est *symétrique* par rapport à l'axe réel

➡ Règle 3 : *Branches du lieu appartenant à l'axe réel*

Un point M de l'axe réel appartient au lieu si le nombre de pôles et zéros réels de la boucle ouverte, comptés avec leur ordre de multiplicité, et situés à la droite du point M, est impair

➡ Règle 4 : *Asymptotes des branches à l'infini*

Les $n - m$ asymptotes des branches partant à l'infini font avec l'axe réel des angles :

$$\alpha_\lambda = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{n - m}, \quad \lambda = 0, 1, \dots, (n - m - 1)$$

Ces $n - m$ asymptotes s'intersectent avec l'axe réel en un seul point d'abscisse :

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

▣ Règle 5 :

→ *Points de séparation* :

Correspondent à l'intersection du lieu avec l'axe réel et traduit l'existence d'une racine réelle multiple qui a la propriété d'annuler la dérivée de $F_{BO}(z)$:

$$\frac{d F_{BO}(z)}{d z} = 0$$

⇒ condition nécessaire mais pas suffisante

→ *Angle des branches au point de séparation :*

Si N branches du lieu d'Evans se coupent en un point de séparation alors l'angle entre deux demi-branches voisines est égal à $\frac{\pi}{N}$

▣ Règle 6 :

→ *Angle de départ d'une branche :*

Soit p_k un pôle de multiplicité n_k , alors les n_k branches partant de p_k font des angles β_k par rapport à l'horizontale et

$$\beta_k = \frac{1}{n_k} \left(\sum_{i=1}^m \arg(p_k - z_i) - \sum_{j=1, j \neq k}^n \arg(p_k - p_j) - \pi(1 + 2\lambda) \right),$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, (n_k - 1)$$

→ *Angle d'arrivée d'une branche :*

Soit z_k un zéro de multiplicité m_k , alors les m_k branches arrivant en z_k font des angles γ_k par rapport à l'horizontale et

$$\gamma_k = \frac{1}{m_k} \left(- \sum_{i=1, i \neq k}^m \arg(z_k - z_i) + \sum_{j=1}^n \arg(z_k - p_j) - \pi(1 + 2\lambda) \right),$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, (m_k - 1)$$

▣ Règle 7 : *Graduation du lieu en valeur de K*

La valeur de K en tout point M, d'affixe z_M , du lieu d'Evans se calcule en utilisant l'équation caractéristique ou la condition du module

Exemple : Soit $F_{BO}(z) = K \frac{z + 0,5}{(z - 1)(z - 0,5)}$

Règle 1 :

Nombre des branches : $n = 2$ branches

Points de départ : les pôles de la boucle ouverte $\{1; 0,5\}$

Points d'arrivée : le zéro de la boucle ouverte $\{-0,5\}$ et le zéros à l'infini

\implies 1 branche à l'infini

Règle 3 : Branches du lieu appartenant à l'axe réel : tout point M d'abscisse z_M avec

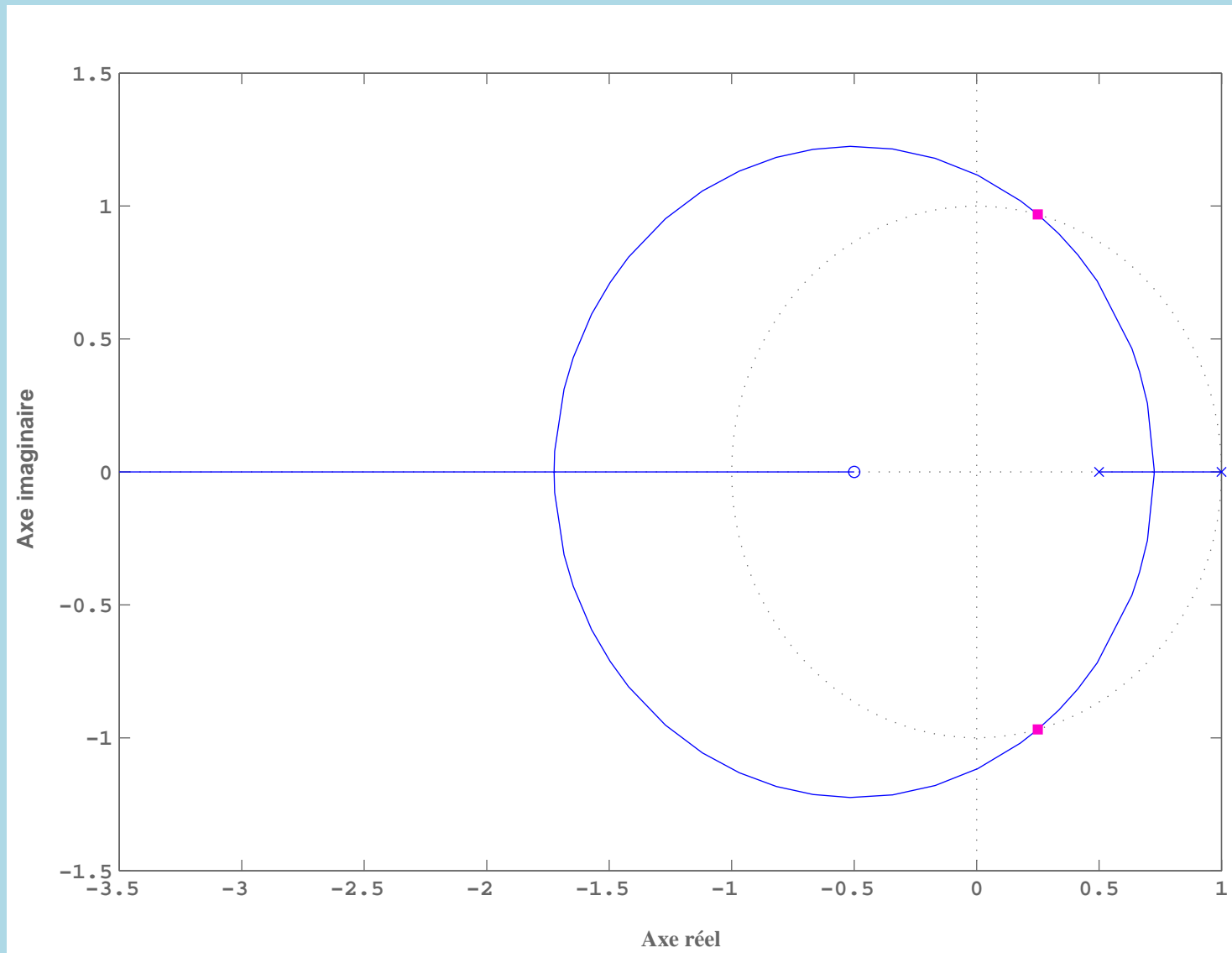
$$z_M \in [0,5 \ 1] \cup (-\infty \ -0,5]$$

Règle 4 : Asymptote de la branches à l'infini : $\alpha_0 = \pi$

Règle 5 : Points de séparation :

$$\frac{d F_{BO}(z)}{d z} = 0 \implies z_1 = 0,72 \text{ et } z_2 = -1,72$$

Angles des branches aux points de séparations = $\pm \frac{\pi}{2}$



4 – Résumée

- ➡ Correspondance entre les plans s et z donnée par $z = e^{sT_e}$
- ➡ Un système linéaire discret/échantillonné est *stable* si et seulement si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité
- ➡ Critère de Nyquist similaire au cas des systèmes à temps continu à l'exception de la construction du contour de Nyquist qui devient le cercle unité
- ➡ Construction du lieu d'Evans basée sur les mêmes règles que dans le cas des systèmes à temps continu → interprétation et étude de la stabilité du système asservi selon la région de stabilité des systèmes discrets (l'intérieur du cercle unité)