



Introduction à l'analyse numérique



Formation d'Ingénieurs en Partenariat
EII et TI Santé
(édition 2018-2019)

Christophe DOIGNON
Professeur



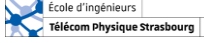
Bureau C418 – courriel : c.doignon@unistra.fr

Télécom Physique de Strasbourg Université de Strasbourg, FRANCE

1



1

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON



Plan du cours

- Avant-propos**
- Chapitre 1 : Les incertitudes**
- Chapitre 2 : Recherche itérative de racines**
- Chapitre 3 : Calculs matriciels numériques**

2


2

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

Avant-propos

- *Objectifs et Compétences*
- *Structure du cours*



iti

3

3

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

A.1 Objectifs et Compétences

L'élève-ingénieur est confronté dans son métier à la *représentation et aux opérations sur des données* sur ordinateur. Les logiciels associés aux traitements des données permettent d'obtenir des résultats le plus souvent synthétiques (vente sur un mois, température minimale sur une saison, débit de fluide sur quelques millisecondes, puissance maximale à un endroit, histogramme d'une image, profil de vitesse, position d'un bras robotique,...) dont l'analyse est à réaliser, afin de conclure sur la validité, la précision, la robustesse, la fiabilité d'un produit complet ou d'un seul composant.

Qu'il s'agisse d'archives ou de mesures acquises en temps réel par exemple, les données sont très fréquemment comparées, en vue d'en percevoir des évolutions, des tendances ou des incohérences sur une région spatiale ou sur un horizon temporel. Des modélisations sont la plupart du temps nécessaires pour rassembler les données et définir alors des descripteurs déterministes ou statistiques (fonctions polynomiales, gaussiennes, modélisations géométriques,...) et des *estimations* (interpolation, calcul de moyenne, d'écart-type, régression,...) *linéaires ou non-linéaires* sont alors mises en œuvre.

Les compétences à acquérir dans ce cours concernent le maniement du calcul numérique (*ou computational engineering*), en particulier pour la résolution des équations en préservant ses caractéristiques.

iti

4

4

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON


École d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

A.1 Objectifs et compétences

Je prends souvent en exemple des mesures en temps réel de la température pour illustrer les objectifs de ce cours.

Supposons par exemple qu'avec un thermomètre placé sur le rebord d'une fenêtre une mesure de température $T = T_i$ soit effectuée en temps réel, toutes les 10 secondes pendant une semaine, et que nous voulions calculer la température moyenne \bar{T} toutes les 10 secondes, afficher l'évolution de la température chaque jour pour chaque demi-heure, et enfin comparer son profil avec celui des autres jours du mois.

La température moyenne, au bout de k mesures, est

$$\bar{T}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_i = \frac{1}{k} (T_1 + T_2 + \dots + T_k)$$


Il apparait évident avec cette formule que la quantité de calculs n'est pas la même au bout de 2 min ($k = 12$) ou au bout de 4 jours ($k = 34560$). Pour assurer le déterminisme temps réel, il y a lieu de préférer mettre à jour \bar{T}_k avec la dernière mesure de température T_k et à partir de \bar{T}_{k-1}

$$(k - 1) \bar{T}_{k-1} + T_k = k \bar{T}_k$$

formule qui requiert le même nombre d'opérations quel que soit l'instant considéré.

iti

5

5

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

École d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

A.1 Objectifs et Compétences

Pour faire ce calcul, il faut stocker l'entier k (correspondant à la date), et la valeur moyenne \bar{T}_{k-1} et la nouvelle mesure T_k comme deux nombres réels.

Un graphique montrant l'évolution de la température journalière pour chaque demi-heure nécessite de stocker 48 nombres réels dans un tableau.

Pour comparer les températures sur un mois, on pourrait calculer les 48 différences entre les $48 \times 31 = 1488$ températures de chaque même demi-heure. Cependant, ceci risque de ne pas être très informatif car les différences pourraient se compenser entre différences positives et négatives. Si on calcule les valeurs absolues des différences, nous ne saurons pas à quels moments les différences sont les plus significatives.

Il est plus pertinent de définir un **modèle de température** journalière, à l'aide de courbes dont on connaît bien les propriétés comme des droites, des polynômes, des gaussiennes,..., et comparer directement les caractéristiques de ces courbes : pente et offset d'une droite, coefficients des polynômes, ou amplitude, centre et étalement pour une gaussienne.

iti

6


6

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON


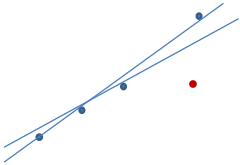
Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

A.1 Objectifs et Compétences

Cela nécessite d'effectuer une **estimation** de ces paramètres à partir de beaucoup de mesures, parfois certaines sont aberrantes quand par exemple le soleil éclaire juste le rebord de fenêtre pendant 10 minutes ou qu'un flocon de neige tombe sur le thermomètre.



Ainsi plus généralement, pour réaliser une estimation la moins biaisée possible, il faut donc savoir si chaque mesure est éligible (la conserver ou non) pour le calcul de la moyenne, mais aussi savoir quel est l'impact d'une mesure erronée sur la précision du résultat, comme c'est le cas ci-dessous avec l'image d'un disque partiellement occulté lors de l'estimation de son rayon et de son centre, ou encore l'estimation d'une droite passant par 4 points sélectionnés ou par tous les points...

iti

7

7

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

A.2 Structure du cours

Dans ce cours, nous allons aborder l'essentiel des *mécanismes de propagation des erreurs* dans le calcul des valeurs de paramètres à partir de mesures.

Le premier chapitre aborde tout d'abord l'évaluation des incertitudes dans les valeurs scalaires estimées, en gardant toujours à l'esprit l'importance du choix du type de variable pour le stockage de l'information qui y est renfermée ainsi que pour les opérations qui sont effectuées. Par la suite, nous verrons la propagation des incertitudes lors des opérations de base, puis sur une fonction de plusieurs variables.

Nous étudierons, dans le deuxième chapitre, les principales méthodes de *calculs itératifs ou directs*, pour la recherche de racines ou de minimum. Ces techniques sont nécessaires notamment pour la résolution d'équations non-linéaires, pour tenir compte de la présence du bruit dans la mesure ou des mesures aberrantes.

Les normes associées aux représentations des vecteurs et matrices et leur emploi pour évaluer les erreurs d'estimation lors des fluctuations de la mesure sont expliquées dans le troisième chapitre pour maintenir la stabilité des résultats. Nous aborderons ici des *techniques d'inversion et de décomposition de matrices* en fonction de leurs structures particulières, techniques très employées pour la modélisation et l'estimation linéaire précise de paramètres.

iti

8

8


Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

Chapitre 1

Les incertitudes

- *Calcul des incertitudes*
- *Propagation des incertitudes*



iti

9

9

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

1.1 Les incertitudes

Les **incertitudes** ou erreurs (ou au moins une borne supérieure sur) peuvent être estimées par la définition de l'écart entre la valeur exacte et la valeur calculée. Les sources principales d'erreurs sont les suivantes :

- **incertitudes sur les valeurs**, qui peuvent être réduites en améliorant la précision des mesures,
- **erreur d'arrondi** (exemple $\pi = 3,14$), sur la représentation, le stockage de données,
- **erreur de troncature**, qui provient du fait que l'on a remplacé dans un modèle numérique des passages à la limite (dérivées par exemple), par des opérations mettant en jeu un nombre fini de calculs (différences, moyenne glissante,...),
- **propagation des erreurs** sur les opérations successives.

Pour cela, on définit la différence entre une valeur estimée q^* et la valeur exacte q par l'écart absolu (appelée aussi **erreur absolue**) ε_a :

$$\varepsilon_a = |q - q^*| = \Delta q$$

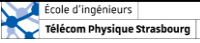
ε_a est un nombre réel positif.

On écrit aussi : $q = q^* \pm \varepsilon_a$.

iti

10

10

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 


1.1 Les incertitudes

On définit l'**erreur relative** ε_r par le rapport entre l'erreur absolue et la valeur absolue de la valeur exacte, ou approchée par la valeur estimée quand la valeur exacte est inconnue. C'est un nombre réel positif tel que :

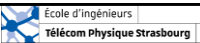
$$\varepsilon_r = \Delta q / |q| = \varepsilon_a / |q| \approx \varepsilon_a / |q^*|$$

On écrit aussi : $q = q^*(1 \pm \varepsilon_r)$.

Exemple : $A = -2,70 \cdot 10^{-4} \pm 4 \cdot 10^{-6}$
 On a ici : $|A^*| = 2,70 \cdot 10^{-4}$ et $\varepsilon_a = 4 \cdot 10^{-6}$ et on a : $\varepsilon_r \approx 1,48 \cdot 10^{-2}$

 11

11

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

1.1 Les incertitudes

Les imprécisions sur les nombres flottants $r = (-1)^s m 2^e$ portent sur le $(p + 1)^{ième}$ chiffre binaire de la mantisse stockée sur p bits (24^{ème} chiffre pour les nombres réels simple précision).


En simple précision, on aura donc :

$$\varepsilon_a \leq 2^{-24} 2^e$$

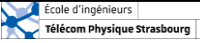
$$\varepsilon_r \leq \frac{\varepsilon_a}{2^e} = 2^{-24} \approx 6 \cdot 10^{-8}$$

Finalement, seuls les 7 premiers chiffres décimaux sont donc significatifs.

En double précision, ce sont les 16 premiers chiffres qui sont significatifs. Ceci nous permettra de limiter les tolérances lors de la définition des critères d'arrêt dans les processus itératifs (chapitre 2).

 12

12

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

1.2 Propagation des incertitudes

Dans le cadre de traitements mettant en œuvre des opérations arithmétiques sur les nombres réels, les erreurs se propagent et cette propagation peut aboutir à des résultats fortement erronés.


- Addition, soustraction : les incertitudes **absolues** s'additionnent (mais pas les incertitudes relatives [voir plus loin])

$$U = U^* \pm \varepsilon_a \text{ et } V = V^* \pm \varepsilon'_a \rightarrow U + V = U^* + V^* \pm (\varepsilon_a + \varepsilon'_a)$$
- Multiplication : les incertitudes **relatives** s'additionnent (presque)

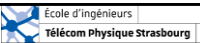
$$U = U^*(1 \pm \varepsilon_r) \text{ et } V = V^*(1 \pm \varepsilon'_r)$$

$$\rightarrow UV = U^* V^* (1 \pm \varepsilon_r)(1 \pm \varepsilon'_r) \approx U^* V^* (1 \pm (\varepsilon_r + \varepsilon'_r))$$
- Division : les incertitudes **relatives** s'additionnent (presque) aussi

$$\rightarrow \frac{U}{V} \approx \frac{U^*}{V^*} (1 \pm (\varepsilon_r + \varepsilon'_r))$$

 13

13

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

1.2 Propagation des incertitudes

- Addition, soustraction : les incertitudes **relatives** s'expriment par (laissé en exercice)

$$U = U^* \pm \varepsilon_a \text{ et } V = V^* \pm \varepsilon'_a$$

$$\rightarrow U + V = (U^* + V^*) \left(1 \pm \frac{|U^* \varepsilon_r| + |V^* \varepsilon'_r|}{|U^* + V^*|}\right)$$


$$\rightarrow U - V = (U^* - V^*) \left(1 \pm \frac{|U^* \varepsilon_r| + |V^* \varepsilon'_r|}{|U^* - V^*|}\right)$$
 (problème de division si les valeurs estimées sont très proches)

Les résultats pour $\varepsilon_r^{U+V} = \frac{|U^* \varepsilon_r| + |V^* \varepsilon'_r|}{|U^* + V^*|}$ et pour $\varepsilon_r^{U-V} = \frac{|U^* \varepsilon_r| + |V^* \varepsilon'_r|}{|U^* - V^*|}$ sont alors des nombres positifs.

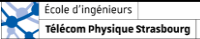
Exercice :
Calculer les erreurs relatives sur $U + V$ et sur UV pour les données suivantes :

$$U = 2.0 \cdot 10^{-4} \pm 4 \cdot 10^{-6}$$

$$V = -1.5 \cdot 10^{-3} \pm 10^{-5}$$

 14

14

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

1.2 Propagation des incertitudes


- Pour des expressions plus complexes, on utilisera un développement au premier ordre autour de la valeur estimée u^* . Ainsi pour une fonction $f(u)$ où $u = u^* \pm \Delta u$, on calculera le nombre positif Δf comme l'erreur absolue ε_a à l'aide de $f'(u^*)$:

$$\Delta f \approx |f'(u^*)| \Delta u \quad (\text{car } f'(x) = \frac{df}{dx})$$
- Pour des expressions à deux variables (u, v) , on utilisera un développement au premier ordre autour de la valeur vectorielle estimée (u^*, v^*) grâce au calcul du vecteur gradient local $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)^T$ en ce point. Ainsi pour une fonction $f(u, v)$ où $u = u^* \pm \Delta u$ et $v = v^* \pm \Delta v$, on calculera Δf à l'aide de $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$ en u^* et de $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$ en v^* :

$$\Delta f \approx \left|\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(u^*)\right| \Delta u + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(v^*)\right| \Delta v \quad (df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy)$$

Exercice : Calculer Δf pour la fonction $f(u, v) = u^2 + v$ avec :

$u = 315 \pm 12$ et $v = -530 \pm 17$

 15

15

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

 16

16

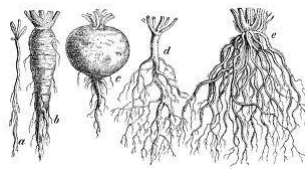
Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

Chapitre 2

Recherche itérative de racines

- Propriétés des fonctions
- Dichotomie
- Méthodes de la sécante et de la fausse position
- Méthodes de Newton (racines et minimum)



17

17

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

L'objectif de ce chapitre est de savoir mettre en oeuvre une des méthodes d'estimation des valeurs des racines d'une fonction non-linéaire d'une variable réelle, c'est-à-dire plus généralement la résolution approchée du problème suivant :

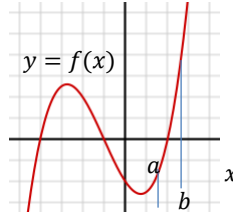
Etant donné $f : I =]a, b[\subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,
trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) tel que $f(\alpha) = 0$.

Il est important de noter que, bien que f soit à variables réelles, ses zéros peuvent être complexes ($\in \mathbb{C}$), mais nous nous intéresserons ici principalement qu'à la détermination des racines réelles.

Les méthodes pour approcher une racine α de f sont en général itératives; elles consistent à construire une suite de valeurs numériques $\{x^{(k)}\}$ telle que

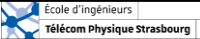
$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$$

La convergence vers la racine recherchée des méthodes itératives dépend en général du choix de la valeur initiale $x^{(0)}$, pour $k = 0$. Le plus souvent, on ne sait établir que des résultats de convergence locale, c'est-à-dire valables seulement pour un $x^{(0)}$ appartenant à un certain voisinage de la racine α . Les méthodes qui convergent vers la racine α pour tout choix de $x^{(0)}$ dans l'intervalle I sont dites globalement convergente vers α .



18

18

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

Le calcul direct pour la résolution d'une équation non-linéaire trouve très vite ses limites. On peut à la rigueur résoudre directement des équations algébriques à base de polynôme de degré $n \leq 4$ ou certaines équations trigonométriques. La plupart du temps, il est très hasardeux de se lancer dans la résolution d'une équation non-linéaire mélangeant les polynômes, les fonctions trigonométriques, les fonctions logarithmiques ou exponentielles,....

Pour aborder de tels problèmes, il est toujours de première importance de se poser les questions suivantes pour s'orienter vers telle ou telle méthode, directe ou itérative :


- où chercher les racines ? : dans quel domaine (formé par des intervalles de valeurs admissibles) ? Solutions réelles ou complexes ?
- combien de racines peut-il y avoir au total ? Ou au moins combien puis-je en trouver dans le domaine qu'il m'est demandé d'étudier ?

Quand on a affaire à des équations polynômiales, la réponse à ces deux questions est liée au degré du polynôme. Parfois le domaine des solutions peut être réduit à un intervalle de par la définition même de la variable.

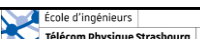
2.1.1 Résolution directe d'équations quadratiques à coefficients réels

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

Il est bien connu que les solutions x_1 et x_2 sont telles que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

 19

19

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

On est donc passé d'UNE équation algébrique $f(x) = 0$ où la variable réelle x parcourt un domaine à un système $g(x_1, x_2) = 0$ qui lui ne concerne que les solutions (parce que je sais qu'il y en a deux !) et composé d'une équation linéaire, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et d'une équation quadratique $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Noter l'interchangabilité des deux solutions dans ces deux équations.

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ nous indique le type de solutions :

- $\Delta < 0$: les deux solutions sont dans le domaine des nombres complexes, et sont conjuguées
- $\Delta > 0$: les deux solutions sont réelles
- $\Delta = 0$: les deux solutions sont réelles et identiques


L'expression des solutions dans le cas où $\Delta \geq 0$ est bien sûr donnée par :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

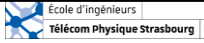
Sinon l'expression des solutions dans le cas où $\Delta < 0$ est donnée par :

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- **Exercice** : déterminer les solutions réelles de l'équation $c^2 + 4s^4 - 3 = 0$ où $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$ et $\theta \in \mathbb{R}^+$.

 20

20

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles


Parce que de nombreux systèmes physiques peuvent être formalisés par des matrices réelles (3×3), il est pragmatique de connaître une méthode simple et directe d'estimation des valeurs propres, racines de son polynôme caractéristique. Cela passe en général par la résolution d'une équation cubique.

2.1.2. Résolution directe d'équations cubiques à coefficients réels

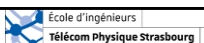
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ avec } a \neq 0 \text{ (ec)}$$

Une telle équation possède au moins une racine réelle. Comme pour les équations quadratiques, on peut passer d'UNE équation algébrique $f(x) = 0$ où la variable réelle x parcourt un domaine à un système $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ qui lui ne concerne que les solutions et est composé d'une équation linéaire, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, d'une équation quadratique, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ et d'une équation cubique $x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$. Noter l'interchangabilité des trois solutions dans ces équations. Nous verrons au chapitre 3, que ces relations s'expriment avec le déterminant et les traces de la matrice quand les solutions sont ses valeurs propres, racines de son polynôme caractéristique.

L'équation cubique (ec) peut toujours se simplifier en considérant le changement de variable $z = x + \frac{b}{3a}$ pour donner $z^3 + pz + q = 0$, appelée équation réduite, avec $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ et avec $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$ (démonstration laissée en exercice).

 21

21

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

Le discriminant de l'équation cubique (ec) est défini par la quantité

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$$

et son signe nous indique le type de solutions :

- $\Delta < 0$: deux racines sont complexes conjuguées, la troisième est réelle.
- $\Delta > 0$: les trois racines sont réelles et distinctes
- $\Delta = 0$: une racines double ou triple, réelles.


Il existe plusieurs méthodes pour résoudre l'équation réduite, nous présentons ici brièvement la méthode de Viète. En effet, celle-ci requiert la résolution d'une équation quadratique, en opérant deux autres changements de variable, d'une part (avec $y \neq 0$):

$$z = y - \frac{p}{3y}$$

qui fournit l'équation : $y^3 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0$ et d'autre part

$$X = y^3$$

qui fournit l'équation quadratique $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ (voir 2.1.1 pour sa résolution).

 22

22

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

Convexité

C'est LA propriété à rechercher pour obtenir une convergence « à coup sûr ! » (convergence globale). Elle est définie ainsi :

La fonction f est **convexe** sur un intervalle I lorsque pour tout couple de valeurs (x_1, x_2) de l'intervalle I ($x_1 \neq x_2$) et pour tout réel $\mu \in]0,1[$ on a :

$$f(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) \leq \mu f(x_1) + (1 - \mu)f(x_2)$$

(strictement convexe avec le signe $<$ au lieu de \leq).

Convexité : le segment en orange (la corde) se trouve toujours au-dessus de la courbe $(x, f(x))$ pour tout x entre a et b .

iti

23

23

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

Convexité (suite)

- Entre autre pour $\mu = \frac{1}{2}$, on a $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, si la fonction f est continue dans l'intervalle I (l'image du barycentre est inférieur au barycentre des images).
- Si f et g sont deux fonctions convexes, alors $f + g$ est une fonction convexe.

Exercice : la fonction $f(x) = x^2 - 1$ est-elle convexe sur $[-1,1]$?

iti

24

24

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

Convexité (suite)

- Entre autre pour $\mu = \frac{1}{2}$, on a $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, si la fonction f est continue dans l'intervalle I .
- Si f et g sont deux fonctions convexes, alors $f + g$ est une fonction convexe.

Exercice : la fonction $f(x) = x^2 - 1$ est-elle convexe sur $[-1,1]$?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, et $\mu \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} & (\mu x_1 + (1 - \mu)x_2)^2 - 1 \leq \mu (x_1^2 - 1) + (1 - \mu) (x_2^2 - 1) \\ \Leftrightarrow & \mu^2 x_1^2 + 2\mu(1 - \mu)x_1 x_2 + (1 - \mu)^2 x_2^2 \leq \mu x_1^2 + (1 - \mu)x_2^2 \\ \Leftrightarrow & (\mu^2 - \mu)x_1^2 + 2\mu(1 - \mu)x_1 x_2 + ((1 - \mu)^2 - (1 - \mu))x_2^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \mu(\mu - 1)x_1^2 - 2\mu(\mu - 1)x_1 x_2 + \mu(\mu - 1)x_2^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \mu(\mu - 1)(x_1 - x_2)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

iti

25

25

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

Convexité (fin)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I , alors on a les équivalences suivantes :

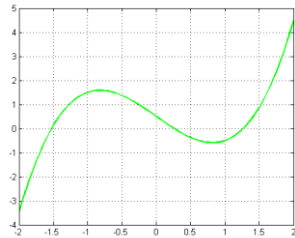
- la fonction f est convexe sur l'intervalle I ,
- la dérivée f' est croissante sur l'intervalle I ,
- la dérivée f'' est positive sur l'intervalle I ,

Exemple : la fonction $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$ est-elle convexe sur $[0,2]$, sur $[-2,2]$?

Comme elle est dérivable sur cette intervalle, on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \quad ; \quad f''(x) = 6x$$

La fonction $f''(x)$ s'annule en 0 et change de signe. On a la présence ici d'une inflexion, concavité si $x < 0$ et convexité si $x > 0$, point d'inflexion pour $x = 0$



iti

26

26

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

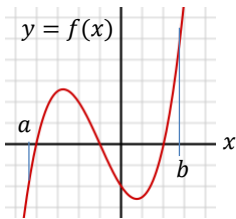
La continuité et dérivabilité d'une fonction de la variable réelle amène aussi à l'application du **théorème des zéros** et de celui **des accroissements finis**.

Théorème des Zéros (pour une fonction continue)

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur l'intervalle $[a, b]$,
si $f(a) f(b) < 0$ alors $\exists \alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Remarques :

- De par le fait qu'il indique qu'une racine (au moins) se trouve dans l'intervalle si les deux conditions sont remplies, ce théorème est très utile et très simple à mettre en pratique.
- Le théorème ne précise pas si α est unique; en fait il ne l'est pas toujours, comme illustré ci-dessous.



iti

27

27

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

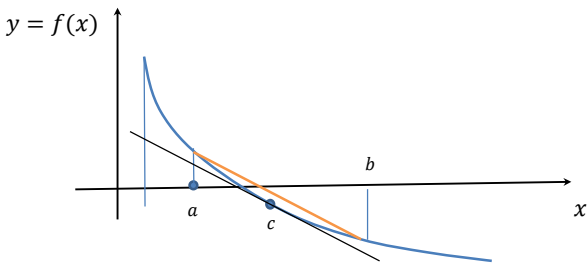
2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

Accroissements finis (pour une fonction dérivable)

Si une fonction de la variable réelle f est continue sur l'intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe un réel c compris strictement entre a et b vérifiant

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

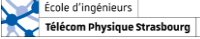
Graphiquement, le théorème des accroissements finis indique que, pour toute sécante d'une courbe différentiable, il existe quelque part entre a et b une tangente (en noire, ci-dessous) de pente parallèle à la sécante (en brun).



iti

28


28

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

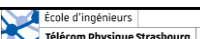
2.1 Introduction - Propriétés des fonctions réelles

Ce sont ces trois propriétés (convexité, continuité et dérivabilité) qui serviront de base pour construire des approches itératives d'une racine.

Nous allons par la suite présenter plusieurs méthodes, d'abord sans calcul de dérivée (*dichotomie*), puis en approximant la dérivée (*sécante*, *fausse position*) et finalement la méthode principale avec calcul numérique de la dérivée (*Newton*).

 29

29

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.2 Détermination d'une racine par dichotomie (bissectrice)


La **méthode de dichotomie** est fondée sur le théorème des zéros d'une fonction continue. En partant de l'intervalle $I_0 = [a, b]$, la méthode de dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a^{(k)}, b^{(k)}]$, $k \geq 0$, avec $I_k \subset I_{k-1}$, $k \geq 1$, et tels que

$$f(a^{(k)})f(b^{(k)}) < 0.$$

Plus précisément, on pose $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$ et $x^{(0)} = (a^{(0)} + b^{(0)})/2$; alors pour $k \geq 0$:

- On choisit $a^{(k+1)} = a^{(k)}$, $b^{(k+1)} = x^{(k)}$ si $f(a^{(k)})f(x^{(k)}) < 0$
- On choisit $a^{(k+1)} = x^{(k)}$, $b^{(k+1)} = b^{(k)}$ si $f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$

et $x^{(k+1)} = (a^{(k+1)} + b^{(k+1)})/2$.

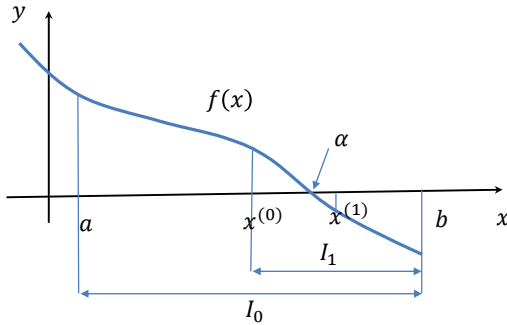
 30

30

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.2 Détermination d'une racine par dichotomie (bissectrice)



Les itérations s'achèvent à la m -ième étape quand $|x^{(m)} - \alpha| \leq |I_m| \leq \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée à l'avance et $|I_m|$ désigne la longueur de l'intervalle I_m .
Considérons à présent la *vitesse de convergence* de la méthode de dichotomie.
Comme $|I_0| = b - a$ et que $|I_k| = \frac{|I_0|}{2^k} = (b - a)/2^k$, en notant $e^{(k)} = x^{(k)} - \alpha$, l'erreur absolue à l'étape k , on déduit que $|e^{(k)}| < \frac{|I_k|}{2} = |b - a|/2^{k+1}$, ce qui implique que $\lim_{k \rightarrow \infty} |e^{(k)}| = 0$. Cette méthode est donc *globalement convergente*.

iti

31

31

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.2 Détermination d'une racine par dichotomie (bissectrice)

Donc étant donnée une tolérance ε souhaitée sur la localisation de la racine, pour avoir $|x^{(m)} - \alpha| \leq \varepsilon \leq \frac{|b-a|}{2^{m+1}}$, en partant de l'intervalle initial $I_0 = [a, b]$, on doit considérer m itérations

$$m \geq \log_2 \left(\frac{|b-a|}{\varepsilon} \right) - 1 = \frac{\ln \left(\frac{|b-a|}{\varepsilon} \right)}{\ln(2)} - 1.$$

En particulier, pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine (c'est-à-dire pour avoir $|x^{(m)} - \alpha| = |x^{(k)} - \alpha|/10$), il faut effectuer $m - k = \log_2(10) \approx 3.32$ dichotomies. Cet algorithme converge donc à coup sûr mais lentement.

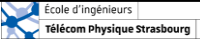
Enfin, notons que la méthode par dichotomie ne garantit pas la réduction *monotone* de l'erreur absolue $e^{(k)}$ d'une itération à la suivante, car on ne peut pas assurer qu'il existe un nombre $0 < m_k < 1$, tel que $|e^{(k+1)}| \leq m_k |e^{(k)}|$, pour tout $k \geq 0$, a priori (méthode pas à l'ordre 1). En conclusion, l'erreur diminue sur plusieurs étapes mais pas toujours d'une étape à la suivante.

Exercice : déterminer une valeur approchée à $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ de la racine de l'équation non-linéaire $e^x + x = 0$ pour $x \in [-1, 1]$, à l'aide de la méthode par dichotomie.

iti

32


32

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

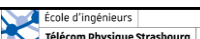
2.2 Détermination d'une racine par dichotomie (bissectrice)

Nb d'itérations minimum : $m = 5$ (4.322).

- $k = 0$: $a^{(0)} = -1, b^{(0)} = 1$ et $x^{(0)} = \frac{a^{(0)}+b^{(0)}}{2} = 0$ donne $f(x^{(0)}) = 1$
 $f(a^{(0)}) = e^{-1} - 1 \approx -0.6321$ et $f(b^{(0)}) = e^1 + 1 \approx 3.7183$
 On choisit $a^{(1)} = a^{(0)}, b^{(1)} = x^{(0)} = 0$ car $f(a^{(0)}) f(x^{(0)}) < 0$
- $k = 1$: $a^{(1)} = -1, b^{(1)} = 0$ et $x^{(1)} = \frac{a^{(1)}+b^{(1)}}{2} = -1/2$;
 $f(x^{(1)}) = e^{-1/2} - 1/2 \approx 0.1065$
 $f(a^{(1)}) = e^{-1} - 1 \approx -0.6321$ et $f(b^{(1)}) = e^0 + 0 = 1$
 On choisit $a^{(2)} = a^{(1)}, b^{(2)} = x^{(1)} = -0.5$ car $f(a^{(1)}) f(x^{(1)}) < 0$
- $k = 2$: $a^{(2)} = -1, b^{(2)} = -0.5$ et $x^{(2)} = \frac{a^{(2)}+b^{(2)}}{2} = -3/4$;
 $f(x^{(2)}) = e^{-3/4} - \frac{3}{4} \approx -0.2776$
 $f(a^{(2)}) = e^{-1} - 1 \approx -0.6321$ et $f(b^{(2)}) = f(x^{(1)}) \approx 0.1065$
 On choisit $b^{(3)} = b^{(2)}, a^{(3)} = x^{(2)} = 0$ car $f(b^{(2)}) f(x^{(2)}) < 0$

 33


33

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

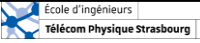
2.2 Détermination d'une racine par dichotomie (bissectrice)

- $k = 3$: $a^{(3)} = -3/4, b^{(3)} = -0.5$ et $x^{(3)} = \frac{a^{(3)}+b^{(3)}}{2} = -5/8$;
 $f(x^{(3)}) = e^{-5/8} - \frac{5}{8} \approx -0.0897$; $|x^{(3)} - x^{(2)}| = \left| -\frac{5}{8} + \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{8} = 0.125$
 $f(a^{(3)}) \approx -0.2776$ et $f(b^{(3)}) \approx 0.1065$
 On choisit $b^{(4)} = b^{(3)}, a^{(4)} = x^{(3)} = -5/8$ car $f(b^{(3)}) f(x^{(3)}) < 0$
- $k = 4$: $a^{(4)} = -5/8, b^{(4)} = -0.5$ et $x^{(4)} = \frac{a^{(4)}+b^{(4)}}{2} = -9/16$;
 $f(x^{(4)}) = e^{-9/16} - \frac{9}{16} \approx 0.0073$
 $f(a^{(4)}) \approx -0.0897$ et $f(b^{(4)}) \approx 0.1065$
 $|x^{(4)} - x^{(3)}| = \left| -\frac{9}{16} + \frac{5}{8} \right| = \frac{1}{16} = 0.0625 > \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2} = 0.05$

On choisit $a^{(5)} = a^{(4)}, b^{(5)} = x^{(4)} = -9/16$ car $f(a^{(4)}) f(x^{(4)}) < 0$

 34

34

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.2 Détermination d'une racine par dichotomie (bissectrice)

- $k = 5 : a^{(5)} = -5/8, b^{(5)} = -9/16$ et $x^{(5)} = \frac{a^{(5)}+b^{(5)}}{2} = -19/32;$


$$f(x^{(5)}) = e^{-19/32} - \frac{19}{32} \approx -0.0415$$

$$f(a^{(5)}) \approx -0.0897 \text{ et } f(b^{(5)}) \approx 0.0073$$

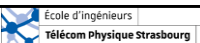
$$|x^{(5)} - x^{(4)}| = \left| \frac{19}{32} - \frac{9}{16} \right| = \frac{1}{32} = 0.0313 < \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2} = 0.05$$

STOP
Valeur retournée (pour la plus petite valeur de $|f(\alpha)|$) :

$$\alpha \approx x^{(4)} = -\frac{9}{16} = -0.5625 \text{ alors que } \alpha \approx -0.5671433$$

 35

35


Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.2 Détermination d'une racine par dichotomie (bissectrice)

Code Scilab : implémentation exemple de la méthode par dichotomie

```
// Ch. DOIGNON (Telecom Physique Strasbourg, ICube)

function z=f(t)
    z = exp(t) + t
endfunction
// define the abscissa values
t=linspace(-1,1,100);y=f(t);
// display the function
h1 = figure(1);clf();plot(t,y,'m');e1 = gce();e1.children(1).thickness = 2;xgrid
// Enclose the root
k_max = 100; // Max of iterations
a = zeros(k_max,1); a(1) = -1.0;
b = zeros(k_max,1); b(1) = 1.0;
tol = 5e-2;
m = (a(1)+b(1))/2;
m_prec= a(1);
k = 1;
while (abs(m-m_prec) > tol & k < k_max )
    m_prec = m;
    if ( ( f(a(k))+f(m) ) < 0 ) then
        b(k+1) = m;
        a(k+1) = a(k);
    else
        a(k+1) = m;
        b(k+1) = b(k);
    end
    m = (a(k+1)+b(k+1))/2;
    k = k+1;
end
printf("Bracketing : %f%f%f\tIterations = %d\n",a(k)," < xsol=",m_prec," < ",b(k),k-1);
```

 36

36

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.3 Méthode de la sécante et de la fausse position

Afin de mettre au point des algorithmes possédant de meilleures propriétés de vitesse de convergence, il est nécessaire de prendre en compte des informations fournies par les valeurs de f et, éventuellement, par sa dérivée première f' (si f est dérivable) ou par une approximation convenable de celle-ci. En considérant pour cela le développement de f autour de la solution recherchée α au premier ordre, il vient grâce au théorème des accroissements finis :

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x)f'(\xi),$$

où ξ est une valeur comprise entre α et x . Cette équation conduit à la méthode itérative suivante : pour tout $k \geq 0$, étant donné $x^{(k)}$, déterminer $x^{(k+1)}$ en résolvant l'équation

$$f(x^{(k)}) + (x^{(k+1)} - x^{(k)})q_k = 0,$$

où q_k est une approximation de $f'(x^{(k)})$. Ceci revient à chercher l'intersection entre l'axe des abscisses x , et la droite de pente q_k , passant par le point $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$, c'est-à-dire :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - q_k^{-1}f(x^{(k)}).$$

Voyons maintenant deux choix particuliers pour q_k , le premier correspond à la méthode de la sécante, le second à la méthode de la fausse position, une extension de la méthode de la sécante.

iti

37

37

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.3 Méthode de la sécante et de la fausse position

Méthode de la sécante

Grâce aux itérations antérieures, on pose : $q_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$, $\forall k \geq 0$

D'où on déduit, en se donnant deux valeurs initiales $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$, la relation suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)})$$

A chaque itération, q_k est calculé, puis inversé. Comme il s'agit d'une approximation par différences finies du calcul de la dérivée, la méthode peut échouer si q_k est proche de zéro. Cependant, si les deux valeurs initiales permettent de définir un intervalle proche de la racine α recherchée et si $f'(\alpha) \neq 0$, alors la vitesse de convergence est plus élevée que celle de la méthode par dichotomie.

iti

38

38

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

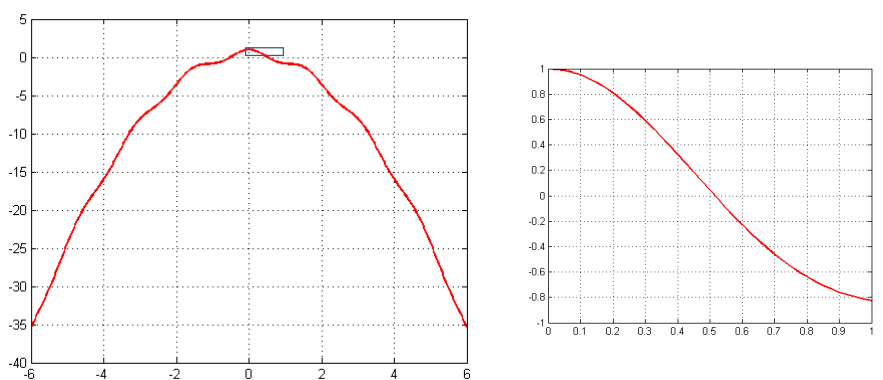
2.3 Méthode de la sécante et de la fausse position

Méthode de la sécante (suite)

Exemple : calculer les 3 premières itérations pour approcher la racine $\alpha \approx 0.5149$ de l'équation

$$f(x) = [\cos(2x)]^2 - x^2 = 0,$$

par la méthode de la sécante, à partir de l'intervalle $I =]0,1[$.



iti

39

39

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.3 Méthode de la sécante et de la fausse position

Méthode de la sécante (suite)

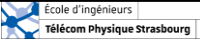
Exemple (suite)

- $k = 0$:
 $x^{(-1)} = 0$ et $x^{(0)} = 1$; $f(x^{(-1)}) = 1$ et $f(x^{(0)}) = -0.8268$
 $q_0 = \frac{f(x^{(0)}) - f(x^{(-1)})}{x^{(0)} - x^{(-1)}} = -1.8268$; $x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{q_0} = 1 - \frac{-0.8268}{-1.8268} \approx 0.5474$
- $k = 1$:
 $x^{(0)} = 1$ et $x^{(1)} = 0.5474$; $f(x^{(0)}) = -0.8268$ et $f(x^{(1)}) = -0.0897$
 $q_1 = \frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}} \approx -1.6284$; $x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{q_1} = 0.5474 - \frac{-0.0897}{-1.6284} \approx 0.4923$
- $k = 2$:
 $x^{(1)} = 0.5474$ et $x^{(2)} = 0.4923$; $f(x^{(1)}) = -0.0897$ et $f(x^{(2)}) = 0.0637$
 $q_2 = \frac{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}{x^{(2)} - x^{(1)}} \approx -2.7840$; $x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{q_2} = 0.4923 - \frac{0.0637}{-2.7840} \approx 0.5152$

iti

40

40

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.3 Méthode de la sécante et de la fausse position

Méthode de la sécante (suite)

Code Scilab : implémentation exemple de la méthode de la sécante

```
// Ch. DOIGNON (Telecom Physique Strasbourg, ICube)


clear;
function z=f(t)
    z = (cos(2*t)).^2-t.^2;
endfunction

// define the abscissa values
t=linspace(-2,2,200);
y=f(t);

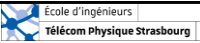
// display the function
h1 = figure(1);clf();plot(t,y,'b');e1 = gce();e1.children(1).thickness = 2;xgrid

// find the closest root
k_max = 100; // Max of iterations
x = zeros(k_max+2,1);
x(2) = 1;
tol = 1e-4;
k = 1;
while (abs(f(x)) > tol & k < k_max )
    q = (f(x(k+1)) - f(x(k))) / (x(k+1) - x(k));
    disp(q);
    x(k+2) = x(k+1) - f(x(k+1)) / q;
    k = k+1;
end

printf("xsol = %f\tIterations = %d\n",x(k+1),k-1);
```

 41

41

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON 

2.3 Méthode de la sécante et de la fausse position

Méthode de la fausse position (ou méthode de Lagrange)


Contrairement à la méthode par dichotomie, la convergence n'est malheureusement pas assurée avec la méthode de la sécante. En particulier, si localement la courbure de la fonction dont on cherche une racine varie rapidement, il se peut que les valeurs de la suite $x^{(k)}$ sortent de l'intervalle initial.

Au lieu de prendre la droite passant par les points $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ et $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$, on prend plutôt celle passant par $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ et $(x^{(k')}, f(x^{(k')}))$ où k' est le plus grand indice inférieur à k tel que $f(x^{(k)})f(x^{(k')}) < 0$. Cette dernière condition rappelle la méthode par dichotomie et guide le choix de l'indice k' à retenir pour calculer les valeurs à l'itération suivante. La formule de la sécante devient alors ici

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k')}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k')})} f(x^{(k)})$$

où $k' \leq k - 1$ et il faut aussi vérifier pour le choix des deux valeurs initiales $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$, que

$$f(x^{(0)})f(x^{(-1)}) < 0.$$

 42

42

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

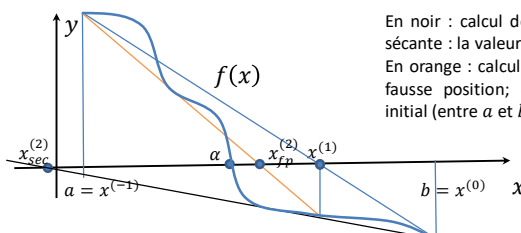
Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.3 Méthode de la sécante et de la fausse position

Méthode de la fausse position (suite)

Remarque : la suite d'indices k' est croissante; pour trouver alors la nouvelle valeur de k' à l'itération k , on peut donc s'arrêter à la valeur k' déterminée à l'étape précédente, évitant ainsi de parcourir l'ensemble des valeurs antérieures de la suite.

Remarque : la méthode de la fausse position, bien qu'ayant la même complexité que la méthode de la sécante, a une convergence linéaire. Néanmoins, contrairement à la méthode de la sécante, les itérations $x^{(k)}$ construites sont toutes contenues dans l'intervalle de départ $[x^{(-1)}, x^{(0)}]$. La méthode de la fausse position peut donc être vue comme une méthode globalement convergente, tout comme celle de dichotomie, mais avec une vitesse de convergence plus rapide.



En noir : calcul de la valeur de $x^{(2)}$ selon la méthode de la sécante : la valeur se situe en dehors de l'intervalle initial.
En orange : calcul de la valeur de $x^{(2)}$ selon la méthode de la fausse position; celle-ci se situe toujours dans l'intervalle initial (entre a et b).

iti

43

43

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

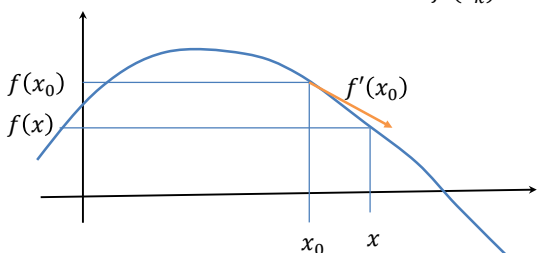
2.4 Détermination d'une racine par la méthode de Newton

On cherche à déterminer x tel que $f(x) = 0$ et où $f(x)$ est dérivable et calculable dans un voisinage. A partir d'une valeur proche de x notée x_0 . Nous avons, au premier ordre (Développement de Taylor), autour de x_0 :

$$f(x_0) - f(x) = f'(x_0) \cdot (x_0 - x).$$

Pour $f(x) = 0$, on obtient : $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Pour une recherche itérative (se rapprochant de plus en plus de la solution recherchée), le schéma précédent est étendu, et appelé Méthode de Newton. Ainsi, à l'itération k , nous avons :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$


iti

44

44

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.4 Détermination d'une racine par la méthode de Newton

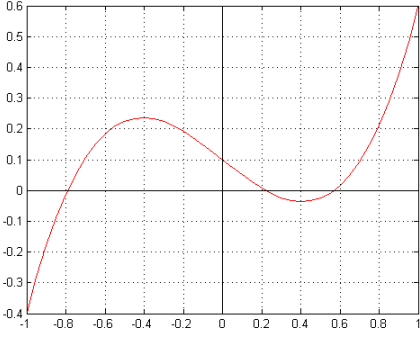
Exemple : $f(x) = x^3 - 0.5x + 0.1 = 0$.

La dérivée première vaut : $f'(x) = 3x^2 - 0.5$ (positive si $|x| \geq \sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0.4082$)

A l'itération k , nous avons :

$$x_{k+1} = x_k - (x_k^3 - 0.5x_k + 0.1)/(3x_k^2 - 0.5)$$

avec $x_0 \in [-1, 1]$.



X0	0	1	-0.5	-0.4
X1	0.2	0.76	-1.4	11.4
X2	0.2211	0.6310	-1.0387	7.6095
X3	0.2218	0.5796	-0.8555	5.0871
X4		0.5699	-0.7975	3.4121
X5		0.5696	-0.7915	2.3048
X6			-0.7914	1.5799
X7				1.1143
X8				0.8270
X9				0.6645
X10				0.5903
X11				0.5710
X12				0.5696

iti

45

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.4 Détermination d'une racine par la méthode de Newton

Code Scilab :

```
// Ch. DOIGNON (Telecom Physique Strasbourg, ICube)
clear;

function z=f3(t)
    z = t.^3-0.5*t+0.1
endfunction

function z = f3prime(t)
    z = 3*t.^2-0.5
endfunction

// define the abscissa values
t=linspace(-1,1,200);y=f3(t);

// display the function
h1 = figure(1);clf();
plot(t,y,'r');e1 = gce();e1.children(1).thickness = 2;xgrid

// find the closest root
x0 = 2; // try another value to find another root
//tol = input("Tolerances of the root value : tol = ");
tol = 1e-4;
k_max = 100; // Max of iterations
x = x0;
k = 1;
while (abs(f3(x)) > tol & k < k_max )
    x = x - f3(x) / f3prime(x);
    k = k+1;
end
printf("xsol = %f\tIterations = %d\n",x,k);
```

iti

46

46

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.4 Détermination d'une racine par la méthode de Newton

Remarques :

- en analysant la méthode sur l'exemple précédent, on s'aperçoit que plusieurs racines peuvent être atteintes, selon la valeur initiale choisie pour mener la méthode de Newton. Les directions de convergence varient en fonction de cette position par rapport aux changements de courbures (passages à zéro de la dérivée seconde avec changement de signe).
- à la k -ième itération, la méthode de Newton nécessite l'évaluation des deux fonctions, f et sa dérivée f' , au point $x^{(k)}$. Cet effort de calcul supplémentaire est compensé par une vitesse de convergence plus élevée que les précédentes méthodes; en revanche la convergence elle-même n'est pas garantie.
- Il se peut que la récurrence doive se terminer, si à l'étape k , $x^{(k)}$ n'appartient pas à l'intervalle initial ou si $f'(x^{(k)}) = 0$; dans ces cas, la méthode échoue.

Il est donc souhaitable de n'utiliser cette méthode que dans un voisinage très limité de la racine α à rechercher.

iti

47

47

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.4 Détermination d'une racine par la méthode de Newton

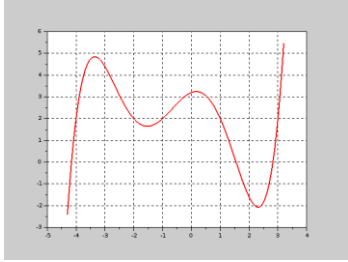
Remarque :

- Lorsque l'on rencontre une dérivée $f'(x^{(k)})$ très faible, voire nulle, il est nécessaire de l'approcher par une valeur numérique non nulle, en s'écartant légèrement du point $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$, par exemple en «passant» $x^{(k)}$ et en prenant $x^{(k+1)}$ tel que $x^{(k)}$ soit entre $x^{(k+1)}$ et $x^{(k-1)}$

$$x^{(k)} = \mu x^{(k+1)} + (1 - \mu) x^{(k-1)}$$

où $\mu \in]0,1[$, donnant alors $x^{(k+1)} = (x^{(k)} + (\mu - 1) x^{(k-1)})/\mu$

Un exemple en est illustré sur la figure ci-contre avec 3 racines réelles d'une équation quintique $f_5(x) = 0$: selon que l'intervalle initial contient un ou plusieurs minimums ou maximums, il est possible que l'on passe par un de ces points lors d'une itération où la dérivée $f'_5(x^{(k)})$ est nulle.



$$f_5(x) = \frac{(x+4)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)}{20} + 2$$

iti

48

48

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.5 Détermination d'un minimum local par la méthode de Newton

Pour une recherche itérative, le schéma de Newton est donc le suivant. A l'itération k , nous avons :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Exercice : Pour déterminer la valeur minimum de $f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$ à partir d'une valeur initiale de $x_0 = 2.5$, on calcule la dérivée première (*gradient*)

$$f'(x) = 2 \cos x - \frac{x}{5}$$

et la dérivée seconde (*hessien*)

$$f''(x) = -2 \sin x - \frac{1}{5}$$

Nous obtenons alors la suite suivante : $x_{k+1} = x_k - \frac{2 \cos x_k - \frac{x_k}{5}}{-2 \sin x_k - \frac{1}{5}}$

Déterminer les valeurs de x_1 , x_2 , $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$

iti

49

49

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

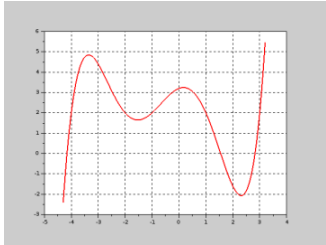
2.5 Détermination d'un minimum local par la méthode de Newton

Exercice : avec la fonction quintique $f_5(x) = \frac{(x+4)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)}{20} + 2$ on peut appliquer la méthode de Newton pour la détermination des minima de cette fonction en développant l'expression de f_5 de la variable réelle x :

$$f_5(x) = \frac{x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24}{20} + 2$$

et permettant de plus facilement la dériver.

Sur la figure ci-contre, on voit que cette fonction possède 4 extrema dans l'intervalle $[-4,3]$, dont deux minima.



La fonction `optim()` du logiciel Scilab permet avec comme dernier argument la méthode `qn` (Quasi-Newton) de déterminer le minimum local, `x_opt`, à condition de fournir l'expression de f , de sa dérivée f' et la valeur initiale `x0`.

iti

50

50

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

2.5 Détermination d'un minimum local par la méthode de Newton

Exemple avec le code de Scilab :

```
// Ch. DOIGNON (Telecom Physique Strasbourg, ICube)

function [f, g , ind]=fqintic(x, ind)
//f = ((x+4).*(x+2).*(x+1).*(x-1).*(x-3))/20+2;
f = (x.^5+3*x.^4-11*x.^3-27*x.^2+10*x+24)/20+2;
// derivative
g = (5*x.^4+12*x.^3-33*x.^2-54*x+10)/20;
endfunction

ind = 1;
// define the quintic values
t=linspace(-4.3,3.2,200);
y=fqintic(t,ind);

// display the quintic function
h1 = figure(1);clf();plot(t,y,'x');e1 = gce();e1.children(1).thickness = 2;xgrid
//xs2png(gcf(),'quintic.png');//xs2jpg(gcf(),'quintic.jpg', 1);

// first call
x0 = 2;
[fopt, xopt] = optim(fqintic, x0, 'qn');
disp(xopt); // xopt = 2.3123416

// second call
x0 = -1;
[fopt, xopt] = optim(fqintic, x0, 'qn');
disp(xopt); // xopt = -1.5264814
```

iti

51

51

Analyse numérique édition 2018-2019. Ch. DOIGNON

Ecole d'ingénieurs
Télécom Physique Strasbourg

iti

52

52