Robotique et automatisation

G. Iuliana BARA

iuliana.bara@lsiit-cnrs.unistra.fr

http://eavr.u-strasbg.fr/∼bara

Télécom Physique Strasbourg

1 – Introduction

- Automatique ("Systems and Control Theory")

  - Définition : une branche des mathématiques et de l'ingénierie qui a comme objectif l'étude, la modélisation, l'identification et l'analyse des systèmes dynamiques dans le but de commander ou de contrôler leur comportement

- Théorie des asservissements ("Control Theory")

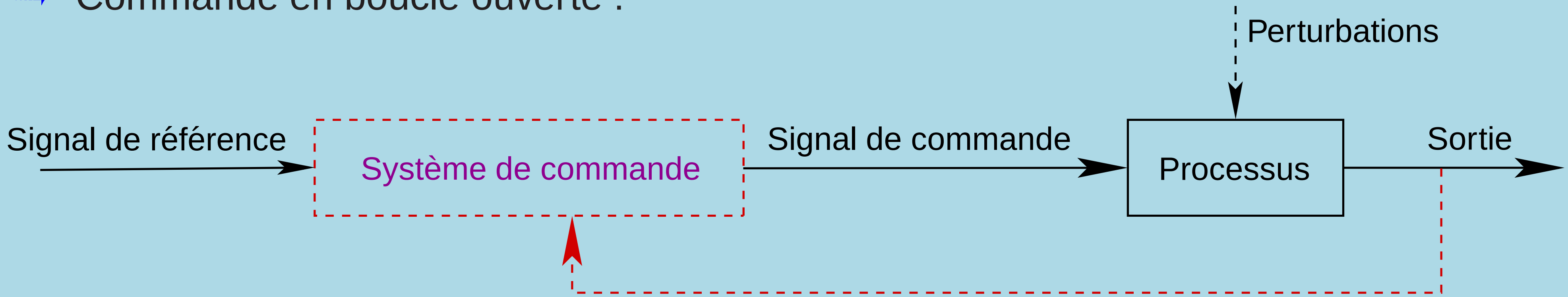
  - Définition : comment actionner sur les systèmes physiques afin d'obtenir, imposer le comportement souhaité

  - Avantages :
    - améliorer les performances des processus industriel et la qualité des produits
    - réduire la consommation énergétique, augmenter la sécurité, minimiser la pollution ...

- But : conception des lois (systèmes) de commande pouvant réaliser les fonctions
  - → d'*asservissement* = poursuite d'un signal de référence
  - → de *régulation* = rejet des perturbations

☞ Architecture des systèmes de commande

- Commande en boucle ouverte :



  - → Système de commande = régulateur, correcteur, compensateur
  - → Le signal de commande est indépendant de ce qui se passe réellement sur le système

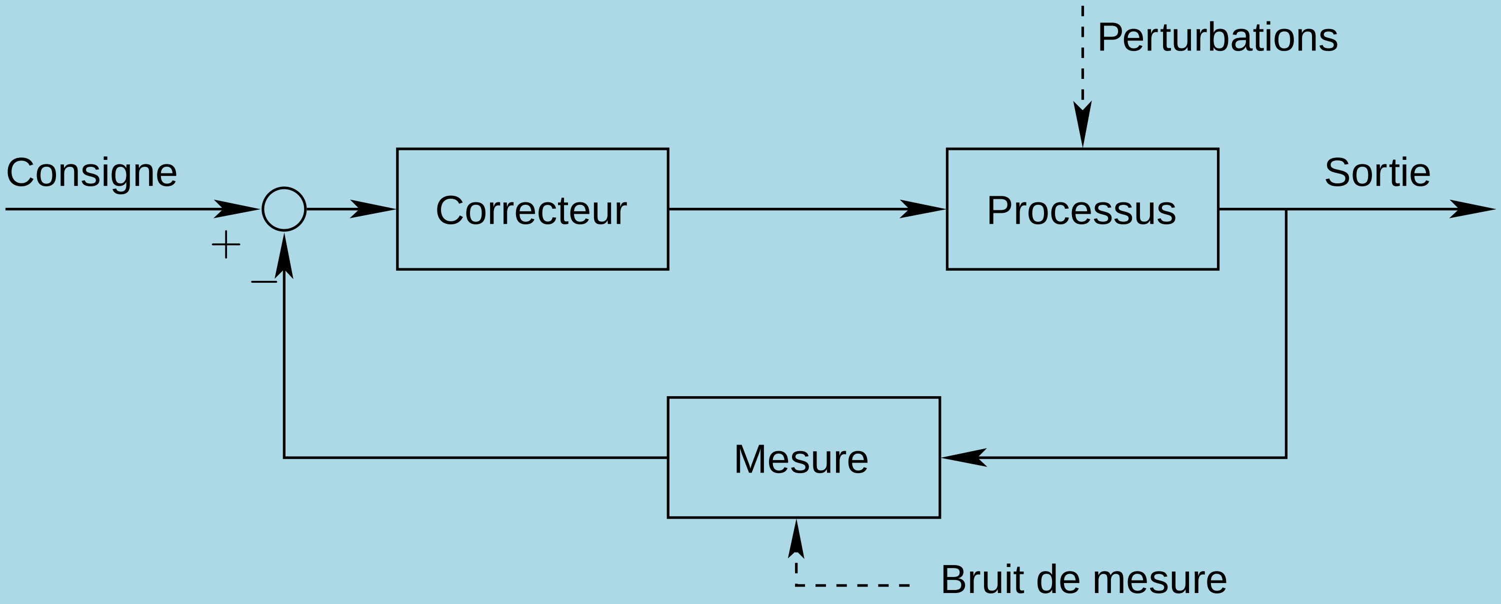
Commande en boucle fermée :

→ stabiliser un système instable en boucle ouverte

→ ameliorer les performances de suivi de consigne

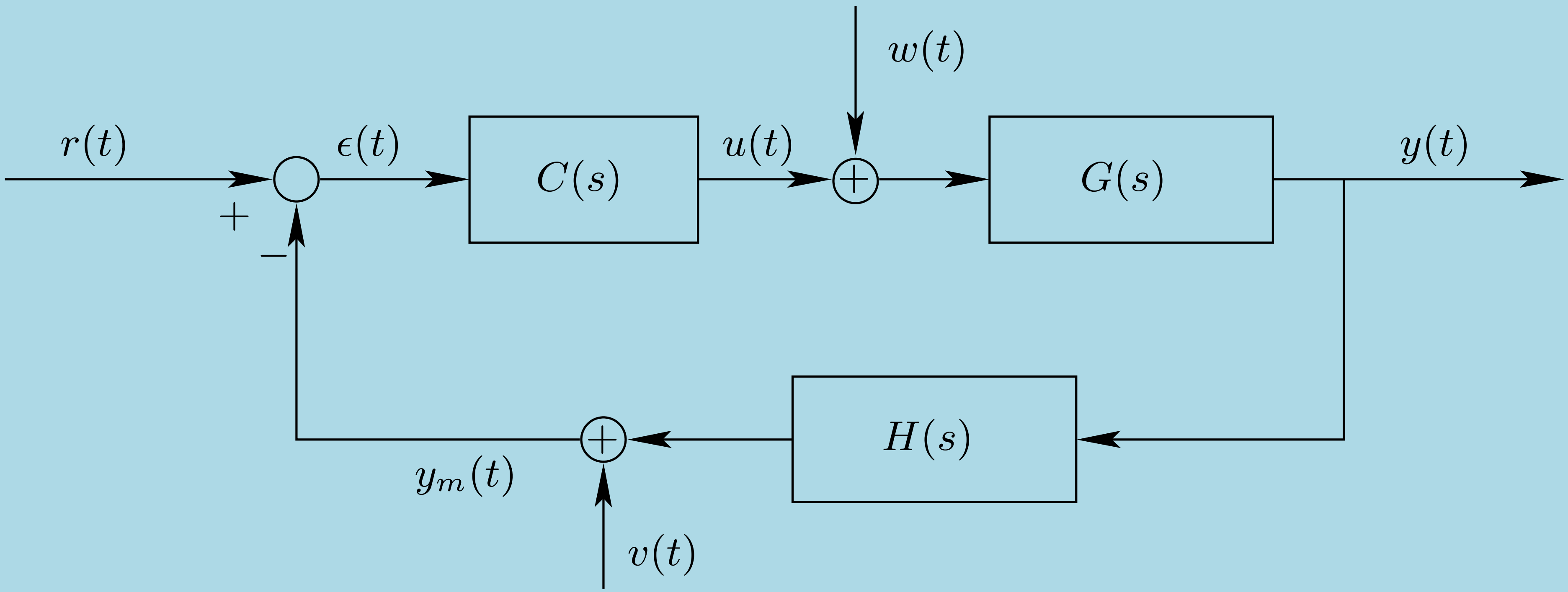
→ compenser des perturbations externes

→ compenser des incertitudes internes au processus



☞ Implementation des systèmes de commande

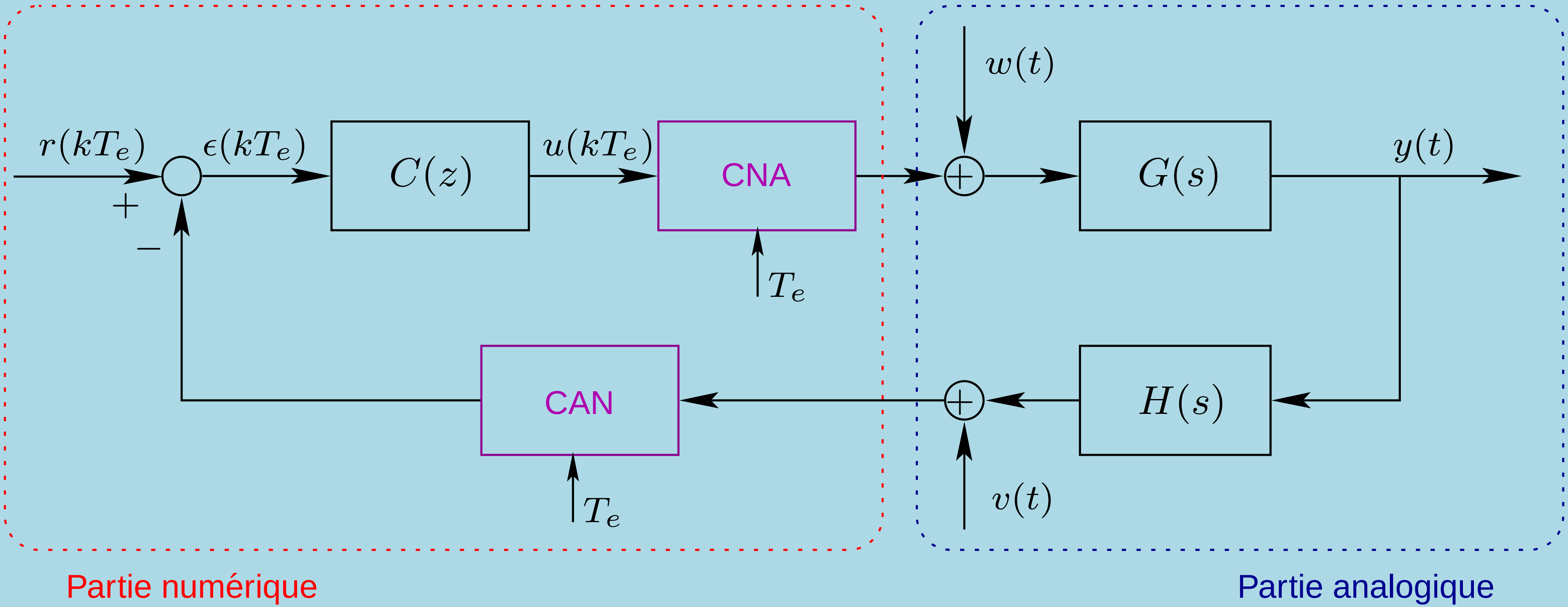
➠ Asservissement continu : correcteur analogique $\Longleftrightarrow$ méthodes de synthèse analogiques



G. Iuliana BARA

- Asservissement numérique : correcteur numérique $\Longleftrightarrow$ méthodes de synthèse numériques

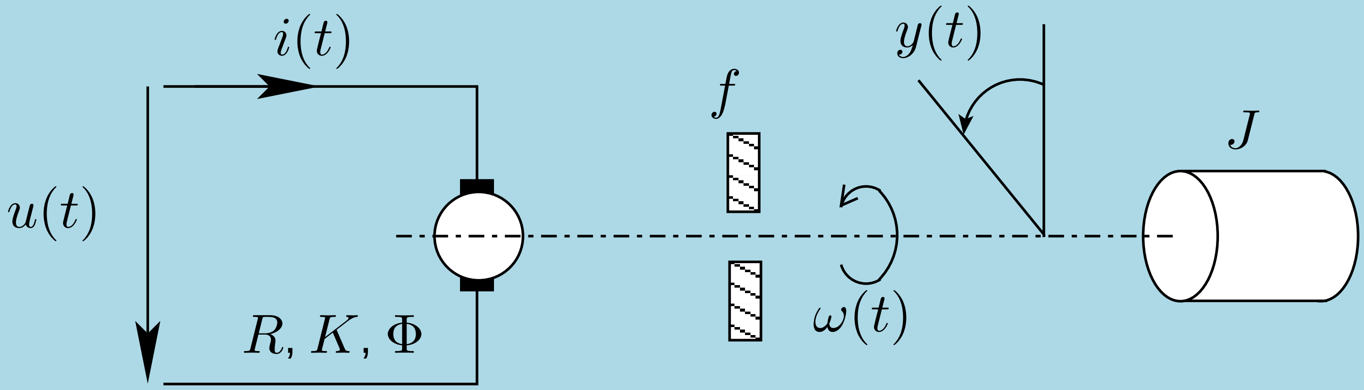
  $\rightarrow$ Atouts : coût faible, précision élevée et insensibilité aux bruits, facilité d'implementation et souplesse par rapport aux modifications



  $\rightarrow$ Mise en œuvre d'une interface entre le calculateur et le procédé (CAN-CNA)

☞ Est-il nécessaire de developer une théorie spécifique pour l'asservissement numérique ?

➠ Exemple 1 : moteur à courant continu couplé à une charge

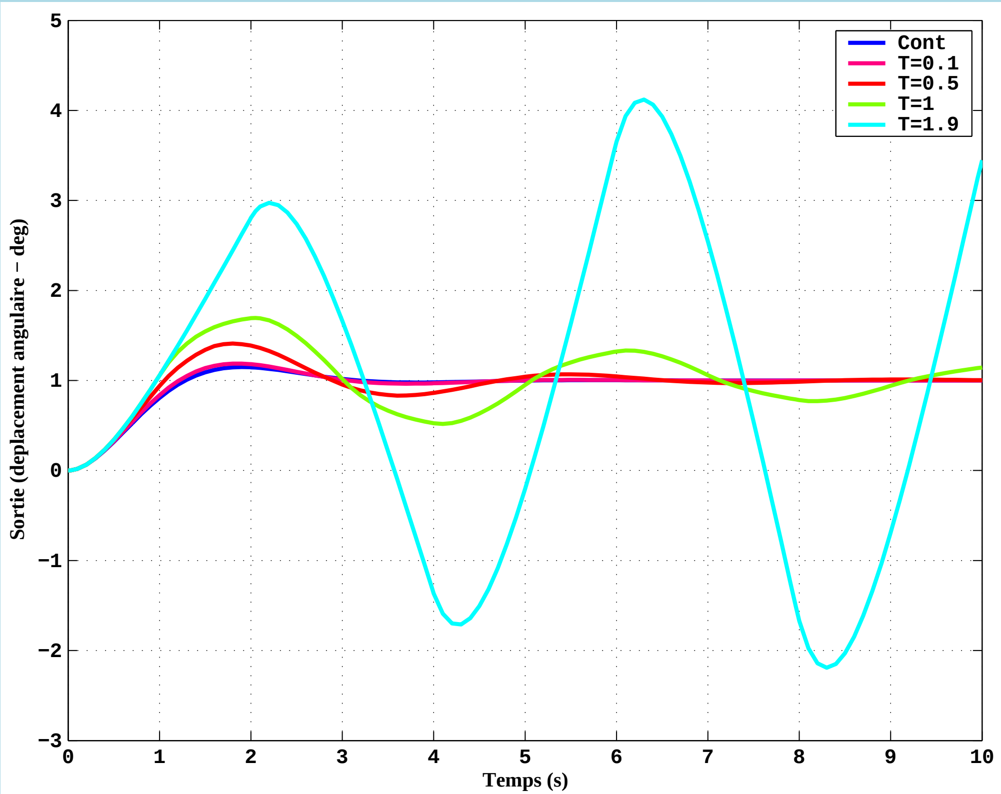


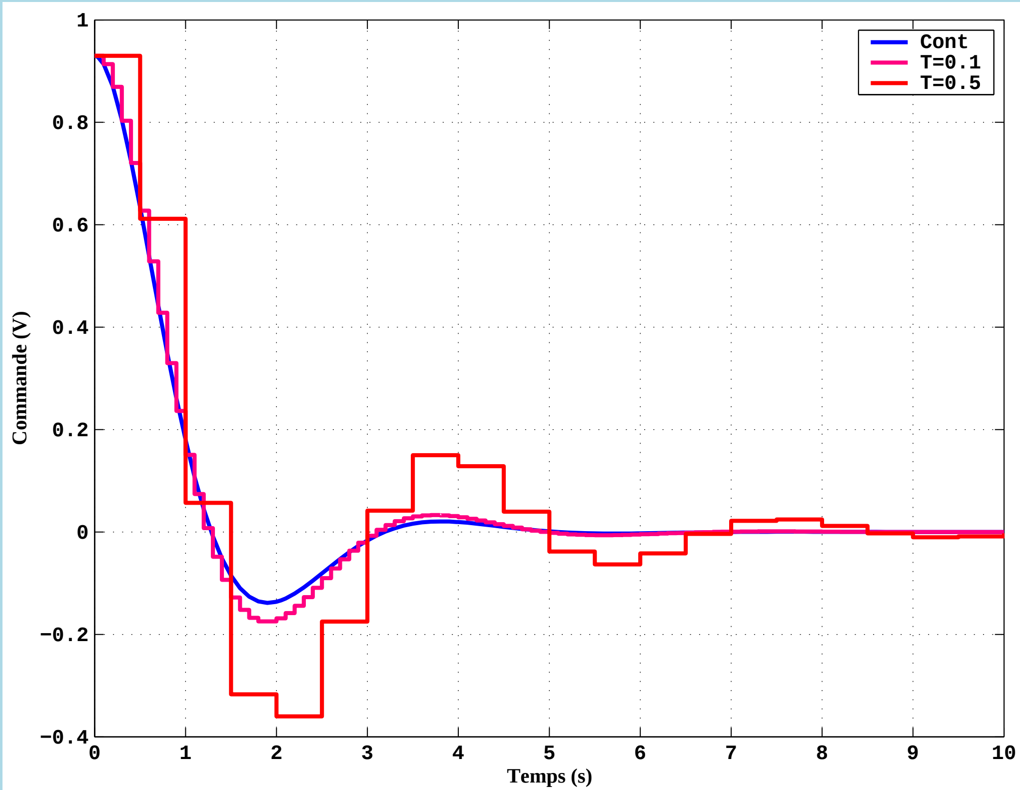
➠ Fonction de transfert $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K\Phi}{JR}}{s^2 + \frac{1}{J}(f + \frac{(K\Phi)^2}{R})s} = \frac{4}{s(s+2)}$$

➠ Correcteur proportionnel analogique $u(t) = K_p(y(t) - r(t))$

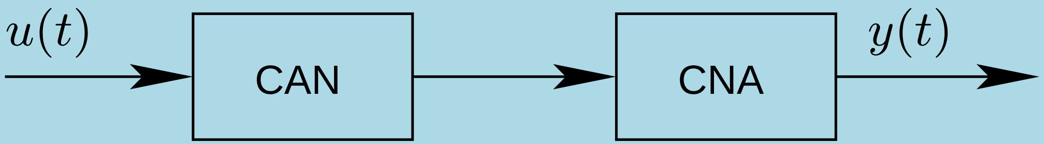
➠ Correcteur proportionnel numérique $u(kT_e) = K_p(y(kT_e) - r(kT_e))$

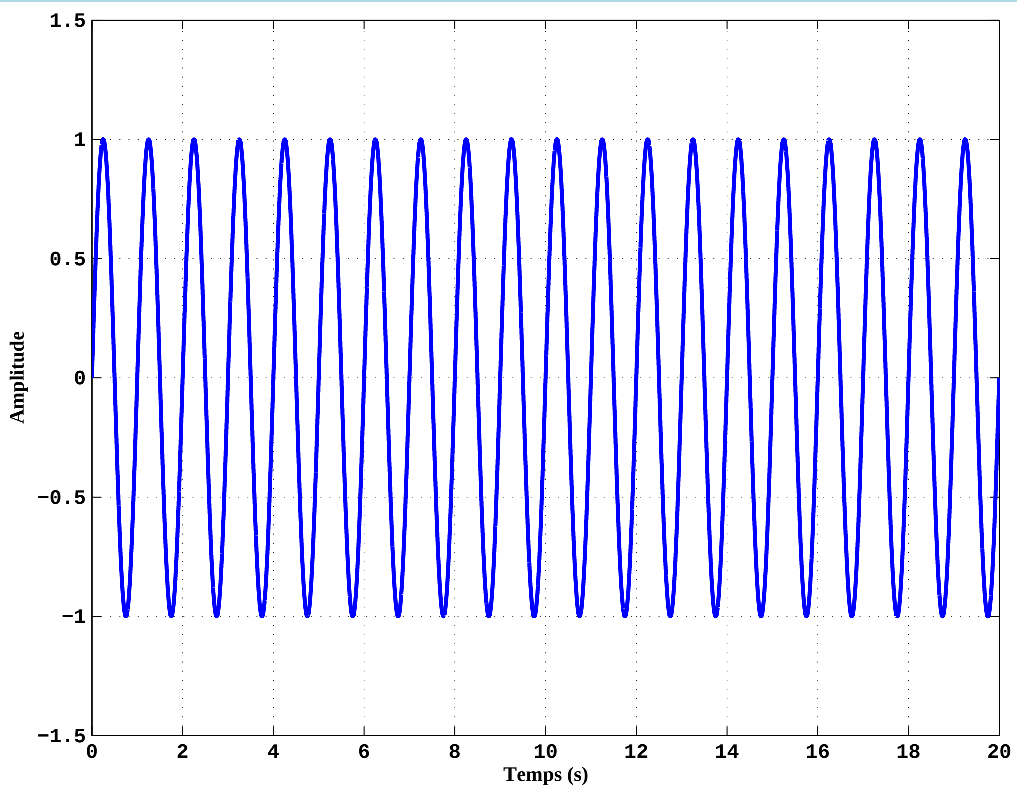
➠ Déplacement angulaire et commande pour une entrée échelon



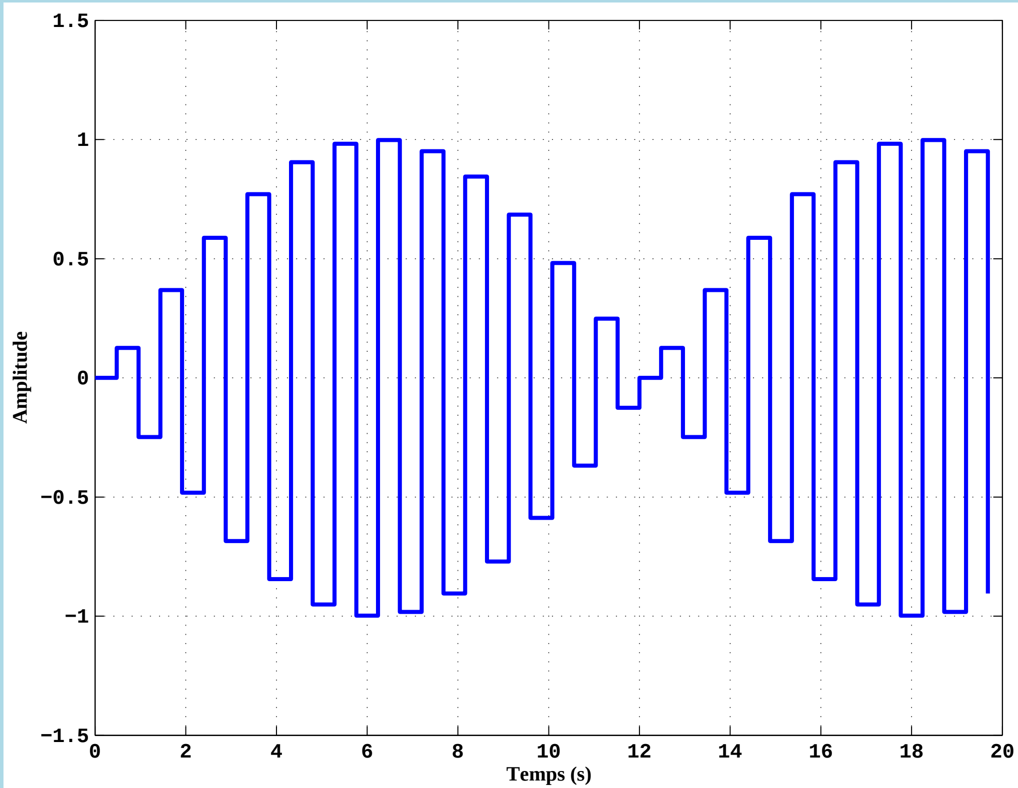


➠ Exemple 2 : phénomène de *battements* du au CAN (mesure à chaque $T = 0.48$s)





$$u(t) = \sin(2\pi t)$$



$$y(t)$$

☞ Conclusion :

mettre ensemble des signaux numériques et analogiques peut générer certains problèmes et difficultés

- Nécessité d'utiliser un outil mathématique spécifique pour l'analyse des systèmes numériques et échantillonnés $\longrightarrow$ transformée en $\mathcal{Z}$
- Nécessité de developer des méthodes d'analyse et de synthèse spécifiques aux systèmes numériques et échantillonnés

2 – Echantillonnage et reconstruction des signaux

☞ Découpage temporel de l'information $\Longrightarrow$ CAN

➠ *Echantillonnage* = consiste à prélever, à période fixe T_e, la valeur du signal analogique

$\Longrightarrow$ signal discret (suite d'échantillons)

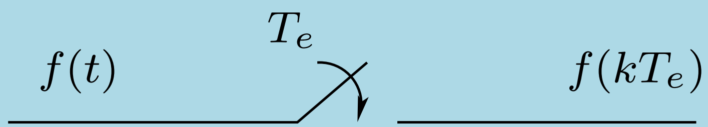
➠ *Quantification* = résulte du fait que les données sont représentées sur un calculateur dans un certain format

"discrétisation" de l'amplitude du signal discret $\Longrightarrow$ signal numérique (suite de nombres)

$\rightarrow$ Erreur associée à la quantification = *bruit de quantification*

CAN remplace un signal analogique par signal numérique (suite des nombres)

☞ Echantillonnage :



➠ En supposant négligeable l'effet de la quantification, on définit le signal échantillonné (signal discret ou numérique) par la suite en k : $\{f(kT_e)\} = \{f(k)\}$

☞ Théorème de Shannon :

Pour pouvoir reconstituer sans perte d'information un signal continu à partir des échantillons de période T_e de celui-ci, il faut que la fréquence d'échantillonnage, $f_e = \dfrac{1}{T_e}$, soit au moins égale au double de la fréquence maximale contenue dans le spectre de ce signal :

$$\boxed{f_e \geq 2 f_M \quad \text{où} \quad f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}}$$

☞ Problème de repliement de spectre :

Pour les systèmes échantillonnés, le bruit de mesure à haute fréquence peut être replié à basse fréquence dans le voisinage de la bande passante du système $\Longrightarrow$ réponse du système au bruit de mesure

➠ Solution : filtre anti-repliement

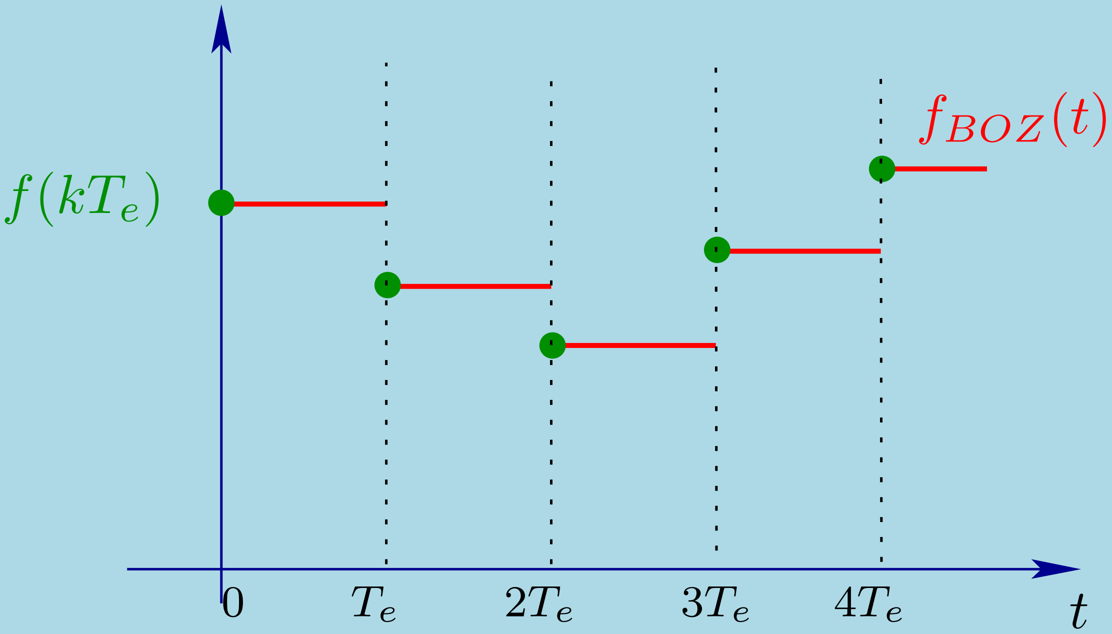
Si le signal comporte des composantes spectrales à des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist ($f_e/2$) alors il faut filtrer le signal analogique avant l'échantillonnage

☞ *Reconstruction* = consiste à élaborer un signal analogique à partir d'une suite de nombres

$\Longrightarrow$ CNA

➠ Utilisation du *bloqueur d'ordre zéro (BOZ)*

$$f_{BOZ}(t) = f(kT_e) \quad \text{pour} \quad t \in [kT_e,\ (k+1)T_e)$$



$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

3 – Transformée en $\mathcal{Z}$

☞ Définition : la *transformée en* z d'un signal causal à temps discret $f(k)$ est définie par

$$\boxed{F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}}$$

➠ Exemple cas échantillonné :

Soit $f(t) = e^{-at}\mathbb{U}(t)$ [a] alors $f(k) = e^{-akT_e}\mathbb{U}(k)$ et

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + e^{-aT_e}\, z^{-1} + \left(e^{-aT_e}\, z^{-1}\right)^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT_e}\, z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}} \end{aligned}$$

si $|z| > R_0 = e^{-aT_e}$ avec R_0 *rayon de convergence*

---

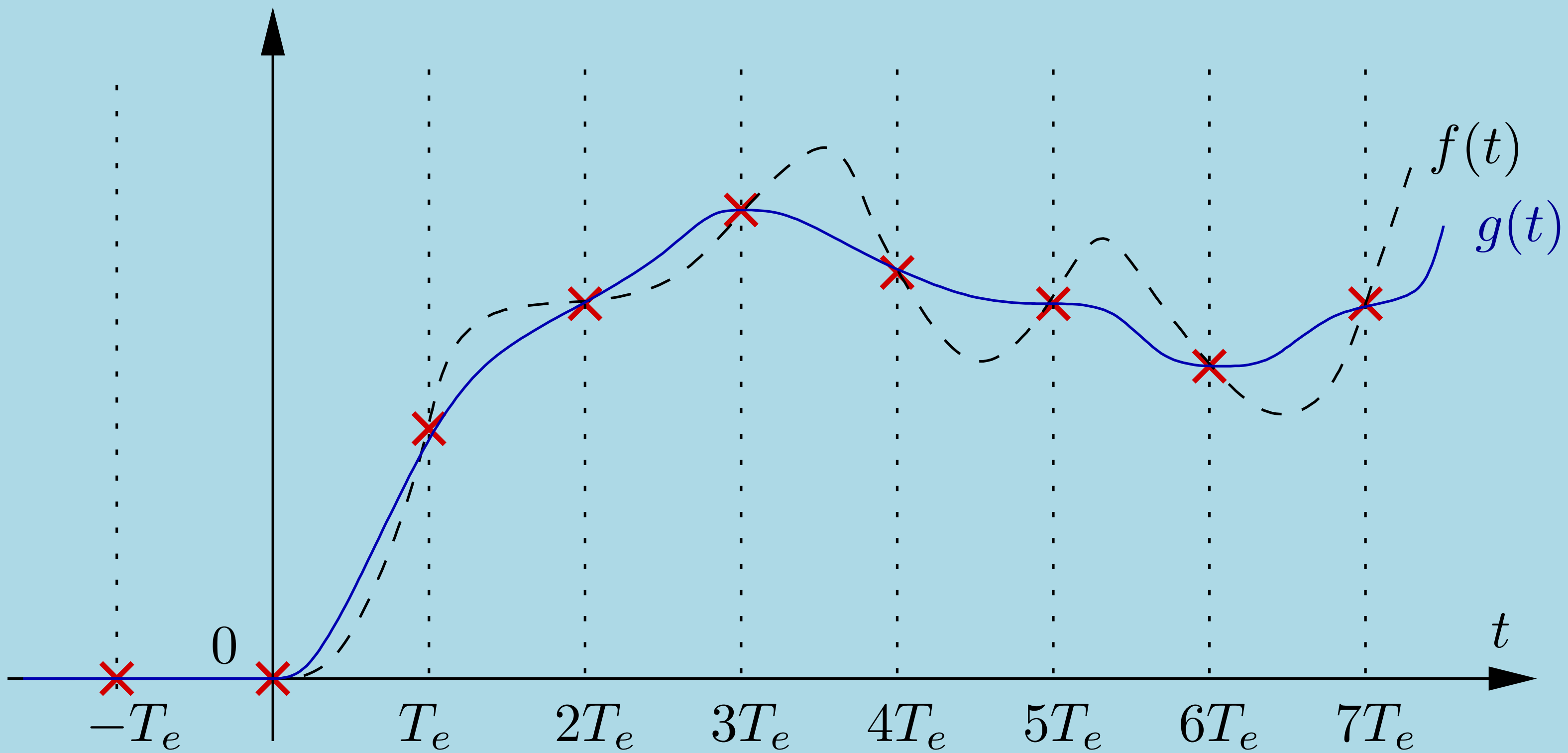
a. $\mathbb{U}(\cdot)$ est le signal échelon unitaire

☞ Propriétés :

- Linéarité : $\mathcal{Z}\{\alpha f(k) + \beta g(k)\} = \alpha F(z) + \beta G(z),\ \forall \alpha, \beta \in \Re$
- Changement d'échelle : $\mathcal{Z}\{\alpha^k f(k)\} = F\left(\frac{z}{\alpha}\right),\ \forall \alpha \in \Re$
- Avance : $\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\, z^{n-k},\ \forall n \in \mathbb{N}$
- Retard des signaux causaux : $\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n} F(z),\ \forall n \in \mathbb{N}$
- Multiplication par une rampe : $\mathcal{Z}\{k f(k)\} = -z\, \frac{dF(z)}{dz}$
- Théorème de la valeur finale : $f(\infty) = \lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$

  la valeur finale existe si les pôles de $(z-1)F(z)$ sont tous à l'intérieur du cercle unité

☞ Transformée en $\mathcal{Z}$ inverse : $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$ permet de retrouver $f(kT_e)$ mais pas $f(t)$



➠ Méthode : décomposition en éléments simples de $\dfrac{F(z)}{z}$ et utilisation de la table de transformées

☞ Application à la résolution des équations aux différences : appliquer la transformée en $\mathcal{Z}$ à l'équation aux différences et ensuite utiliser la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse afin d'obtenir $f(k)$

➠ Exemple : soit l'équation

$$f(k) + 2f(k-1) + f(k-2) = 0,8g(k-1) + 0,4g(k-2) \text{ pour } k \geq 2$$

où $f(k)$ et $g(k)$ causaux, $g(0) = 1$, $g(1) = 0,5$, $g(2) = -0,5$ et $g(k) = 0$ pour tout $k \geqslant 3$.

Comme $G(z) = 1 + 0,5z^{-1} - 0.5z^{-2}$, on obtient

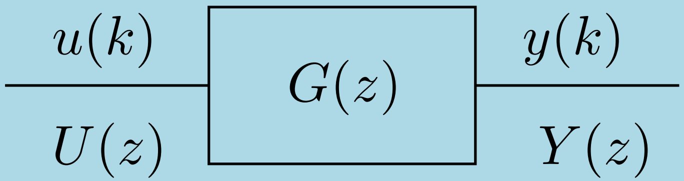
$$F(z) = \frac{0,2(4z^2-1)}{z^2(z+1)} = 0,2\left(3 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{3z}{z+1}\right)$$

et donc

$$f(k) = 0,6\delta(k) + 0,2\delta(k-1) - 0,2\delta(k-2) - 0,6(-1)^k\mathbb{U}(k).$$

4 – Systèmes échantillonnés

☞ Modèles des systèmes linéaires à temps discret (modèles externes)



➠ Equation aux différences (éq. récurrente) pour un système causal :

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n)$$
$$= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m)$$

- Fonction de transfert du système à temps discret ou transmittance discrète

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

→ Relation biunivoque avec l'équation aux différences

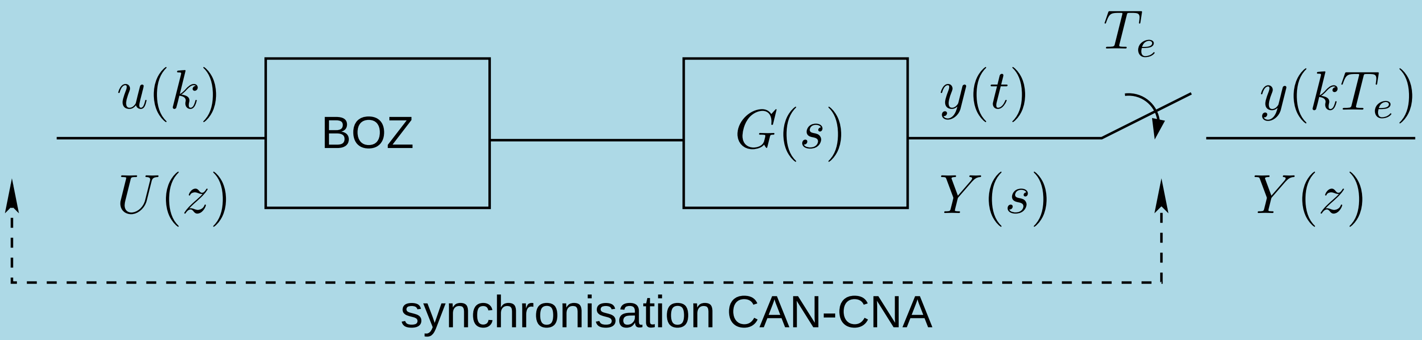
$$G(z) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

→ Pôles et zéros du système discret

→ Polynôme caractéristique

→ Gain statique : $G(1)$

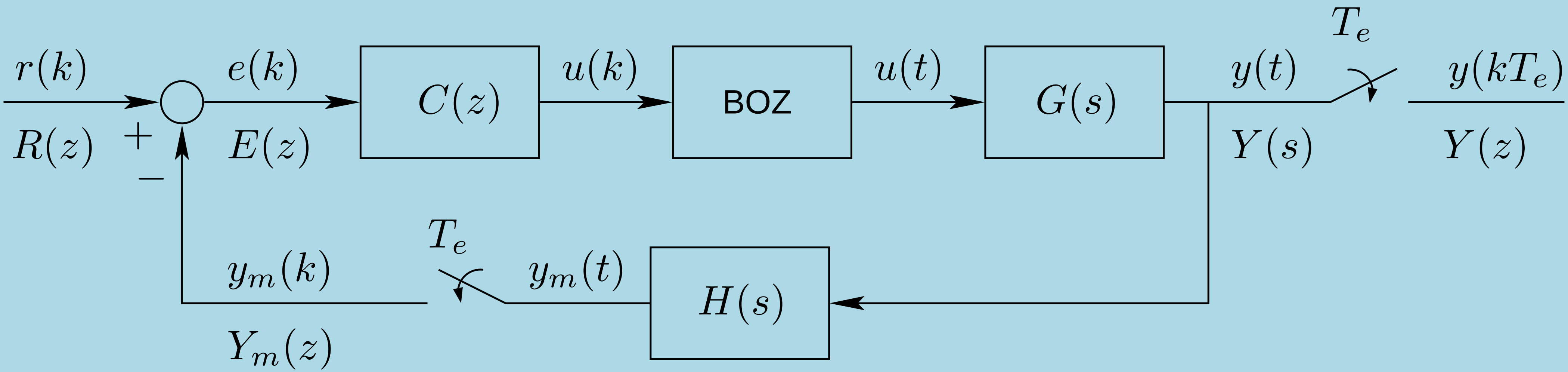
☞ Transmittance échantillonnée : échantillonnage d'un système continu précédé par un BOZ



$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\left\{B_0(s)G(s)\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}$$

avec la notation $\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} \Longleftarrow$ décomposition en éléments simples de $\frac{G(s)}{s}$ et utilisation des tables de transformées

☞ Transmittance échantillonnée des systèmes bouclés avec correcteur numérique :



Algèbre des blocs :

$$\left.\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}\{G(s)B_0(s)\}\,U(z) \\ Y_m(z) &= \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\}\,U(z) \\ U(z) &= C(z)\,E(z) \quad \text{et} \\ E(z) &= R(z) - Y_m(z) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

Fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{C(z)\ \mathcal{Z}\{G(s)B_0(s)\}}{1 + C(z)\ \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\}} \\ &= \frac{(1 - z^{-1})\ C(z)\ \mathcal{Z}\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}}{1 + (1 - z^{-1})\ C(z)\ \mathcal{Z}\left\{\dfrac{H(s)G(s)}{s}\right\}}\end{aligned}$$

5 – Résumée

- Commande numérique des systèmes physiques nécessite l'utilisation d'une interface CAN-CNA $\Longrightarrow$ échantillonnage et reconstruction des signaux
- Echantillonnage en respectant le théorème de Shannon
- Filtre anti-repliement pour diminuer l'influence du bruit de mesure sur la boucle fermée
- Transformée en $\mathcal{Z}$ est un outil mathématique spécifique pour l'analyse des systèmes numériques et échantillonnés $\Longrightarrow$ application à la résolution des équations aux differences
- Calcul de la transmittance échantillonnée d'un système précédé par un BOZ comme

$$(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$\Longrightarrow$ cette transmittance est utilisée lors de l'application des méthodes d'analyse du système en boucle fermée et de synthèse spécifiques aux systèmes échantillonnés